Hausdorff Dimension & Fraktale

1. Hausdorff Maß

sei $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ mit $0 < |U_i| \leq \delta$ so heißt $\{U_i\}$ eine δ-Überdeckung von F

Das Hausdorff Maß ist definiert als $H^S = \lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^S\}$

- H^S ist ein Maß und gilt für beliebige [messbare] Mengen
- H^n unterscheidet sich vom Lebesque-Maß durch ein konstantes Vielfaches, es gilt $H^n(F) = c_n Vol^n(F)$
- Skalierungseigenschaft: $H^S(\lambda F) = \lambda^S H^S(F)$
- mit Hölderbedingung $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^{\alpha}$ gilt $H^{\frac{s}{\varepsilon}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^S(F)$

2. Hausdorff Dimension

Kritischer Punkt ***s*** an dem das Hausdorff Maß von 0 auf ∞ springt heißt Hausdorff Dimension

$$\dim_H F = \inf\{s : H^S = 0\} = \sup\{s : H^S = \infty\}$$

- bei Lipschitz-Transformation (Hölderbedingung mit α=1) ist $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$, bei Bi-Lipschitz gilt Gleichheit
- Offene Mengen: wenn $F \subset R^n$ offen ist gilt $\dim_H = n$
- Glatte Mengen: wenn F eine glatte (stetig differenzierbare) m-dimensionale Untermannigfaltigkeit (Oberfläche) von R^n dann ist $\dim_H F = m$
- Monotonie: falls $E \subset F$ so ist $\dim_H E \leq \dim_H F$
- Abzählbare Stabilität: wenn $F_1, F_2 ...$ eine abzählbare Folge von Mengen, so gilt $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \sup_{1 \leq i < \infty}\{\dim_H F_i\}$
- Abzählbare Mengen: Wenn F abzählbar ist gilt $\dim_H F = 0$

z.B. Koch-Kurve $\dim_H F = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2$ → Interpretation "mehr als eine Linie, weniger als eine Fläche"

3. Box-Counting Methode

Einfacher zu berechnen bzw. empirisch schätzbar ist die Kästchenzähldimension (auch „Kolmogorov-Entropie")

$\dim_B = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$ (N_δ ist die kleinste Anzahl Mengen mit Durchmesser höchstens δ die F überdecken)

Grenzwert entspricht z.B. auch kleinster Abzahl Würfel mit Seitenlänge δ die F überdecken oder kleinster Anzahl δ-Gitterwürfeln die F schneiden.

Es gilt $\dim_H F \leq \dim_B F$

wenn $V \subset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V)$ nichtleere, beschränkte offene Menge existiert und $\{S_i\}$ Menge von Ähnlichkeitsabbildungen, d.h.

$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x-y|$ dann gilt für die invariante Menge $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$: $\dim_H F = \dim_B F = s$ wobei

$1 = \sum_{i=1}^{m} c_i^{\ s}$ [Für Bi-Lipschitz-Abbildungen ist dies ***s*** mit oberen/unteren Lip'-Konstanten obererere/untere Abschätzung der Dimension.]

4. Fraktale mit der Multiple Reduction Copy Machine

Möglichkeit Fraktale (selbstähnliche, unendlich skalierbare Mengen) zu berechnen:
Idee: sei S eine Menge von n Ähnlichkeitsabbildungen bzw. „Linsen"

- Algorithums (a): ein beliebiges Anfangsbild wird rekursiv, bis zur Tiefe m, von jeder Linse transformiert; Aufwand n^m
- Algorithums (b): aus einem zufällig gewählten Anfangspunkt mit einer der Transformationen ein neuer Punkt generiert, die ersten n „Annäherungsschritte" werden verworfen, Verbesserung wenn die einzelnen Transformationswahrscheinlichkeit entsprechend der relativen Größe der Linse bzw. Determinanten der Matrix gewählt wird