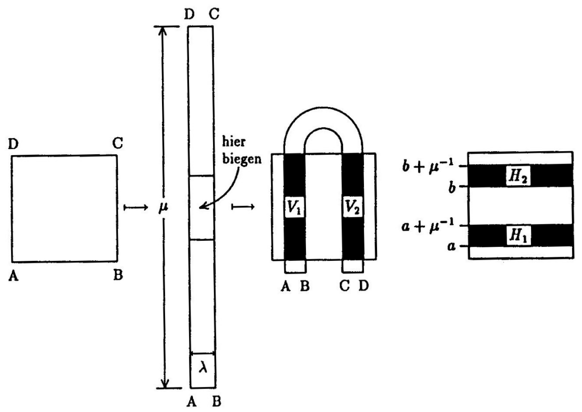
# Smale's Hufeisen Abbildung

***Tim Conrad, Egsdorf 21.-24.06.2001***

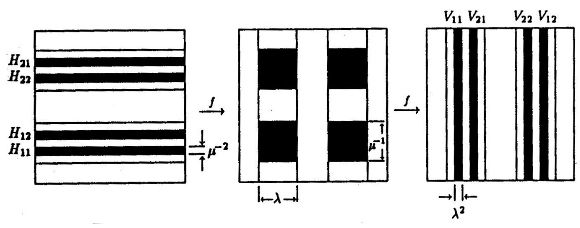
## 1. Beschreibung der Arbeit

Für konkrete dynamische Systeme gelingt der Nachweis chaotischen Verhaltens manchmal dadurch, dass man einen Teil des Phasenraumes durch eine Hufeisenabbildung beschreibt und damit eine enge Beziehung zu einer Shift-Dynamik herstellt.
Genau dies fiel zum ersten Mal Stephen Smale (Mitte der 60er Jahre) auf. Anstatt schlicht der Phasenraumbahn des Systems zu folgen, stellte sich Smale vor, was passiert, wenn er den Phasenraum „sich selbst" strecken, stauchen, falten lässt. Man kann sich vorstellen, dass Smale das Phasenraumrechteck langzog und es wie ein Hufeisen bog. Dieses steckte er dann wieder in ein Rechteck, dass er dann wieder zog und bog...

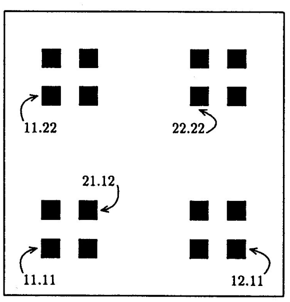
## 2. Konstruktion des Smale'schen Hufeisens




Durch weitere Iterationen erhält man:




## 3. Erkenntnisse




Nun kann man die Schnittmenge der durch vor- bzw. rückwärtsiterieren entstandenen „Streifen" ermittelt und (wie in nebenstehendem Bild zu sehen) nummerieren (bzw. bezeichnen).

Bei der Iteration von f (vor- bzw. rückwärts (f ist injektiv!) ), erkennt man, dass zwei Mengen $\Lambda_H$ und $\Lambda_V$ entstehen, die jeweils aus $2^n$ (bei n Iterationen) disjunkten Streifen bestehen, die jeweils in $H_1$, $H_2$ bzw. $V_1$, $V_2$ verbleiben. Der Durchschnitt aller dieser Streifen bildet eine 2-dimensionale Cantormenge

Die meisten Punkte verlassen unseren begrenzten Raum irgendwann oder sind ab einem best. n nicht mehr in $f^n(Q)$, n ε Z enthalten. Diejenigen Punkte x ε Q, die nicht „heraushüpfen", bilden die maximale invariante Menge $\Lambda = \{x \in S \mid f^n(x) \in S, n \in Z\}$.

Wir führen nun (wie im Vortrag von Tobias bereits gezeigt) einen Symbolraum ($\Sigma_2$) und auf diesem eine Shift-Abbildung ein.

Weiterhin definieren wir eine Funktion S (S: X –> $\Sigma_2$), die uns angibt, in welchem Vertikalen „Ursprungsstreifen" (V1 oder V2) sich ein Punkt in der x. Iteration aufgehalten hat.
(S: X -> $\Sigma_2$ / $S(x) = (\ldots s_{-1}.s_0 s_1 \ldots)$, $s_i = 0$ falls $f^i(x)$ ε V1 und $s_i = 1$ sonst).

Die Dynamik in diesem neuen System (die wir mithilfe der eingeführten Shift-Abb. Analysieren können), spiegelt exakt die Dynamik der ursprünglichen Funktion in Q wider, da S ein Homöomorphismus ist.
Insbesondere besitzt f also auf Lambda eine dichte Menge periodischer Orbits, besitzt dort einen dichten Orbit und ist topologisch transitiv.