Konjugation oder: Wie findet man den Shift in der Feigenbaum-Abbildung

Jörg Härterich, Egsdorf 21.-24.6.2001

1 Konjugation

Wir wollen ein Kriterium dafür finden, dass zwei Abbildungen f und g "das Gleiche" Verhalten zeigen.
Dazu dient die Folgende

Definition 1 *Seine X und Y metrische Räume. Zwei Funktionen $f : X \to X$ und $g : Y \to Y$ heissen* **konjugiert** *zueinander, falls ein Homöomorphismus $\Phi : X \to Y$ existiert, so dass $\Phi \circ f(x) = g \circ \Phi(x)$ ist.*

Dabei ist ein Homöomorphismus eine bijektive, stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.
Am besten veranschaulicht man sich zueinander konjugierte Abbildungen mit folgendem Diagramm:

Lemma 1 *Sind zwei Abbildungen f und g wie oben konjugiert zueinander, dann bildet Φ die Orbits von f auf die Orbits von g ab.*

Insbesondere entsprechen dann Fixpunkten von f auch Fixpunkte von g, periodischen Orbits von f auch periodische Orbits von g, etc.

Bemerkung 1 *Falls Φ sogar ein Diffeomorphismus ist, also in beide Richtungen differenzierbar, dann erhält Φ auch die Stabilität bzw. Instabilität der periodischen Orbits.*

2 Shift und Feigenbaum-Abbildung

Sei $\Sigma = \{(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0};\ s_n \in \{0, 1\}\}$ wieder der Raum der 0-1-Folgen und σ die Shiftabbildung:

$$\sigma : (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots) \mapsto (s_1, s_2, s_3, \ldots).$$

Diesmal betrachten wir die Feigenbaumabbildung $f_a : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit (relativ) großem $a > 4$. Dann sieht der zugehörige Graph etwa wie folgt aus:

Es werden also nur Punkte aus den beiden Intervallen I_0 und I_1 wieder in das Intervall $[0,1]$ abgebildet.

Definition 2 *Wir bezeichnen mit S_a die maximale f_a-invariante Menge, d.h.*

$$S := \{x \in [0,1];\ f_a^n(x) \in [0,1 \text{ füralle } n\}.$$

Der folgende Satz besagt, dass f_a auf S_a dasselbe tut wie der Shift auf Σ.

Satz 1 *Für $a > 2+\sqrt{5}$ sind $f_a : S_a \to S_a$ und $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ konjugiert zueinander. Der zugehörige Homöomorphismus $\Phi : S_a \to \Sigma$ ist gegeben als "Adressierungsabbildung" $\Phi(x) = (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots)$ mit*

$$s_n = \begin{cases} 0 \text{ falls } f^n(x) \in I_0 \\ 1 \text{ falls } f^n(x) \in I_1. \end{cases}$$