Ein Spaziergang durch die Funktionentheorie zum Satz von Montel

Jörg Härterich, Egsdorf 21.-24.6.2001

1 Funktionentheorie: Das Wichtigste in Kürze

Es geht hier **immer** um differenzierbare Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ immer ein offenes, zusammenhängendes Gebiet ist.

Definition 1 *Eine Funktion f heisst* **komplex differenzierbar** *in z_0, falls $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.*
Ist f auf ganz Ω differenzierbar, dann heisst f **analytisch** *(oder auch* **holomorph***).*

Schreibt man $z = x+iy$ und $f(z) = u(x+iy)+iv(x+iy)$, dann ist f komplex differenzierbar, falls gilt:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Diese Beziehungen heissen **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**.

1.1 Eigenschaften analytischer Funktionen

Satz 1 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch und $z_0 \in \Omega$. Dann gilt:*

- *Eine analytische Funktion lässt sich in einer Umgebung $B_r(z_0)$ als Potenzreihe ausdrücken, wobei r der Konvergenzradius ist.*
- *Die Ableitung f' konvergiert ebenfalls im Kreis $B_r(z_0)$.*
- *f ist unendlich oft differenzierbar in z_0.*
- *Es gilt der Cauchysche Integralsatz*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$$

wobei γ eine geschlossene, überschneidungsfreie Kurve um z_0 ist, z.B. ein Kreis.

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt das **Maximumprinzip**: $|f(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$.

2 Hauptsache keine Löcher: Der Riemannsche Abbildungssatz

Beliebte Technik: Statt Funktionen auf kompliziertem Gebiet Ω zu betrachten, lieber auf ein "einfaches" Gebiet transformieren. Dazu möchte man **konforme Abbildungen** ϕ verwenden, also Abbildungen, die bijektiv und in beide Richtungen holomorph sind, also $\phi' \neq 0$.
Das geht fast immer, denn:

Satz 2 (Riemannscher Abbildungssatz) *Sei $\Omega \not\equiv \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine konforme Abbildung, die Ω auf den Einheitskreis abbildet.*

3 Der Satz von Montel

Für das Studium der Julia-Mengen komplexer Abbildungen grundlegend ist der folgende Satz von Montel über das Werteverhalten von Familien analytischer Abbildungen. Dazu muss man die folgenden beiden Definitionen kennen:

Definition 2 *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge analytischer Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$. Dann sagt man, dass f_k* **gleichmäßig im Innern von Ω gegen f konvergiert**, *falls die Folge auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \Omega$ gleichmßig gegen f konvergiert.*

Definition 3

1. *Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen heisst* **normal** *in $\Omega' \subseteq \Omega$, falls eine Teilfolge f_{k_l} gleichmäßig im Innern von Ω' konvergiert, evtl. auch gegen ∞.*

2. *Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Abbildungen heisst* **normal im Punkt** *$z_0 \in \Omega$, falls eine offene Umgebung U von z_0 in Ω existiert, so dass eine Teilfolge f_{k_l} gleichmäßig im Inneren von U konvergiert.*

Bemerkung 1

1. *Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist normal in Ω genau dann, wenn sie normal in jedem Punkt von Ω ist.*

2. *gleichmäßige Konvergenz im Inneren eines Gebiets ist eine schwächere eigenschaft als gleichmäßige Konvergenz auf diesem Gebiet.*

Auch ein Satz von Montel, aber nicht **der** Satz von Montel ist die folgende Version des Satzes von Arzela-Ascoli für analytische Funktionen:

Satz 3 *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge analytischer Funktionen, $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig beschränkt ist, d.h. es gibt ein $M > 0$ so dass $|f_k(z)| \leq M$ gilt für alle $z \in \Omega$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Teilfolge, die im Innern von Ω gleichmäßig gegen eine analytische Funktion f konvergiert.*

Damit können wir –endlich– das Resultat formulieren, das uns im Vortrag über Julia-Mengen einige Male wieder begegnen wird.

Satz 4 (Satz von Montel) *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge analytischer Abbildungen. Falls $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C}$ existieren, so dass keine der Funktionen f_k einen der beiden Werte a und b annimmt, dann ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ normal in Ω.*

Satz 5 (Satz von Montel, alternative Formulierung) *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und die Folge $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ analytischer Abbildungen sei nicht normal. Dann kann man zu jedem $w \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme ein $z \in \mathbb{C}$ und ein $k \in \mathbb{N}$ finden, so dass $f_k(z) = w$.*