Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe 25.10.2001

Aufgabe 1

Sei $\triangle u = 0$ im einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeige:

(i) Es gibt ein $v : \Omega \to \mathbb{R}$, das die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen löst

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \quad u_{x_2} = -v_{x_1}.$$

(ii) Der Geschwindigkeitsvektor $\underline{u} = (u, -v)$ ist eine stationäre Lösung der Navier-Stokes Gleichung in Ω:

$$\underline{u}_t + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = \nu \triangle \underline{u} - \nabla p, \qquad \operatorname{div} \underline{u} = 0.$$

Aufgabe 2

Leite für eine 3-dimensionale stationäre, rotationsfreie Strömung in einem inkompressiblen Medium die Bernoulli-Relation her, d.h. zeige für eine stationäre, rotationsfreie Lösung u der Navier-Stokes Gleichung, daß gilt:

$$\frac{1}{2}|u|^2 + p = \text{const}\,.$$

Aufgabe 3

Die Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + \sum_{j=1}^{n} \sin(jx) f_j(\Phi_1[u], \dots, \Phi_n[u]), \qquad 0 < x < \pi$$

mit Randbedingung $u = 0$ in $x = 0, \pi$ und

$$\Phi_j[u] := \int_0^\pi u(t, x) \sin(jx)\, \mathrm{d}x$$

hat Lösungen der Form

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \sin(jx).$$

(i) Welche Differentialgleichungen müssen die $u_j(t)$ erfüllen?

(ii) Wie lautet die Differentialgleichung bei Anfangsbedingungen $u(0, x) = u_0(x)$ mit $\Phi_j[u_0] = 0$ für alle $j > n$?

(iii) Wie entwickelt sich, etwa bei beschränktem f_j, die Lösung $u(t, \cdot)$ für $t \to +\infty$?

Aufgabe 4

Löse die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$$

mit Randwerten $u(t,0) = u(t,1) = 0$. Verwende dazu den Ansatz $u(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$ (Trennung der Variablen) und entwickle ψ in eine Fourierreihe. Wie sieht die Lösung aus, wenn wir die Anfangswerte

(i) $u(0,x) = \sin(\pi x)$,

(ii) $u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$ oder

(iii) $u(0,x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$ vorschreiben?

Wird die Lösung geglättet?