Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe 1.11.2001

Aufgabe 5

Löse die Differentialgleichung $x_1 u_{x_1} + \ldots + x_n u_{x_n} = \alpha u,\ x_n > 0$ für $\alpha = \text{const} \neq 0$ und gegebenes $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = u_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ in $x_n = 1$.
Zeige insbesondere die Homogenitätsrelation $u(\lambda x) = \lambda^\alpha u(x)$, für alle $\lambda > 0$.

Aufgabe 6

Betrachte die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ auf $x \in (0,1)$ für Zeiten $t > 0$, mit konstanter Wellengeschwindigkeit $c > 0$. Als Randbedingungen wählen wir sogenannte transparente Randbedingungen $cu_\nu = -u_t$ in $x = 0, 1$, wobei ν die äußere Normale bezeichnet. Zeige, daß jede beliebige Lösung $u \in C^2$ für Zeiten $t > 1/c$ konstant ist, also unabgängig von t und x.

Aufgabe 7

Für $u \in L^2(\mathbb{R})$ bezeichne $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformierte

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} u(x)\,\mathrm{d}x,$$

$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Sei nun $u \in C^2$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$, so daß $u_t(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ für jedes feste $t > 0$. Welche Differentialgleichung löst dann die Fouriertransformierte $\widehat{u(t,\cdot)}(k)$? Welche Lösung $u(t,x), t > 0$ erhält man, falls man Anfangsbedingungen $\hat{u}(k) \equiv 1$ wählt?

Aufgabe 8

Zeige, daß eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^N$ dargestellt werden kann als

$$u(t,x) = (G(t,\cdot) * u_0(\cdot))(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x-y) u_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

Hierbei ist

$$G(t,\xi) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4t}\right).$$

Zusatz: Gilt $u(0,x) = u_0(x)$?