Zusätzliche Aufgaben zur **Einführung in die Dynamischen Systeme**

*J. Härterich*

Abgabe am 16.1.2002 in der Vorlesung

**Aufgabe X1:** Sei $x = 0$ ein hyperbolisches Gleichgewicht der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Die lokale stabile Mannigfaltigkeit sei wie in der Vorlesung als Graph

$$W^s_{loc}(0) := \text{graph}(\Psi) = \{(x^s, x^u) \in E^s \times E^u;\ x^u = \Psi(x^s)\}$$

über dem stabilen Eigenraum $E^s$ gegeben. Zeige, dass $W^s_{loc}(0)$ tangential an $E^s$ ist, d.h. $D\Psi(0) = 0$. Nutze dabei die (positive) Invarianz von $W^s_{loc}(0)$ aus.

**Aufgabe X2:** Ein vereinfachtes Modell für Glykolyse hat die Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + ay + x^2 y\\ \dot{y} &= b - ay - x^2 y\end{aligned}$$

wobei $x$ und $y$ Konzentrationen von beteiligten Substanzen sind und $a$, $b > 0$ positive Parameter. Finde die Gleichgewichte und bestimme ihre Stabilität.
Zeige, dass die Region, die von den fünf Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = b/a$, $y = (ab + b)/a - x$ und $x = k$ (mit geeignetem $k > 0$) begrenzt wird, positiv invariant ist.
Was kann man über die Existenz von periodischen Lösungen sagen ?

**Aufgabe X3:** Sei $f$ ein ebenes $C^1$–Vektorfeld und der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_0)$ eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sei beschränkt. Weiter sei $\omega(x_0)$ weder ein Gleichgewicht noch ein periodischer Orbit.
Zeige, dass $\omega(x_0)$ sich als Vereinigung $\omega(x_0) = E \cup H$ schreiben läßt, wobei $E$ aus lauter Gleichgewichten und $H$ aus einer höchstens abzählbaren Anzahl von heteroklinen Orbits besteht.

**Aufgabe X4:** Ein Fluss $\Phi_t$ auf $X = \mathbb{R}^2$ besitze einen echt periodischen Orbit $\gamma$. Zeige, dass dann das Innere $I$ von $\gamma$ ein Gleichgewicht enthält, das heißt, es gibt ein $x_0 \in I$ mit $\Phi_t(x_0) = x_0$ für alle $t$. Benutze hierzu entweder den Brouwerschen Fixpunktsatz oder zeige mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Bendixson, dass es in $I$ einen periodischen Orbit mit minimaler Fläche gibt, der dann ein Gleichgewicht sein muß.

**Aufgabe X5:** Ein Räuber-Beute System der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x) - xy\phi(x)\\ \dot{y} &= -y(cx\phi(x) - d)\end{aligned}$$

heisst *Rosenzweig-McArthur-Modell*. Für die Funktion $\phi$ gelte:

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi'(x) \geq 0, \quad [x\phi(x)]' \geq 0$$

und $x\phi(x)$ ist beschränkt für $x \to \infty$. Die Parameter $c$ und $d$ seien beide positiv.

(i) Interpretiere die einzelnen Terme der Differentialgleichung.

(ii) Bestimme alle Gleichgewichte graphisch durch Betrachten der Kurven $\{\dot{x} = 0\}$ und $\{\dot{y} = 0\}$.

(iii) Gib ein algebraisches und ein graphisches Kriterium für die Stabilität bzw. Instabilität eines Gleichgewichts an.

(iv) Zeige, dass das System eine periodische Lösung besitzt, falls im Quadrant $x, y > 0$ genau ein instabiles Gleichgewicht liegt.

(v) Wie verhalten sich die Lösungskurven, falls im Quadrant $x, y > 0$ kein Gleichgewicht existiert ?

**Aufgabe X6:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$. Zeige, dass

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} \;=\; \dot{A}(t)\, e^{A(t)} \;=\; e^{A(t)}\, \dot{A}(t),$$

wenn $[A(t), \dot{A}(t)] := A(t)\dot{A}(t) - \dot{A}(t)A(t) = 0$ für alle $t \in I$.

**Aufgabe X7:** Plotte mit `DSTOOL` die "Zeit-$2\pi$–Abbildung" *(Poincaré-Abbildung)*

$$\begin{array}{rcl} P : S^1 \times \mathbb{R} & \to & S^1 \times \mathbb{R} \\ \begin{array}{c} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} x(2\pi) \\ \dot{x}(2\pi) \end{array} \end{array}$$

der Schaukel ($x \approx 0$), bzw. des kopfstehenden Pendels ($x \approx \pi$)

$$\ddot{x} + (1 + \alpha^2 \sin t) \sin x = 0$$

a) nahe $\underline{x} = 0$ mit $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.3$

b) nahe $\underline{x} = \pi$ mit $\alpha = 0.05$ (hier $|\dot{x}| \leq 0.01$, $|x - \pi| \leq 0.5$).

Benutze dazu die Option **Poincare Section** im Menü **Orbits** und plotte beispielsweise immer Punkte bei $t = 1$.
Beurteile das Stabilitätsverhalten der Schaukel/des Pendels.
Eine Möglichkeit, die Gleichung einzugeben ist:

```
♯ Schaukel
x' = xdot
xdot' = -sin(x)*(1+alpha*alpha*sin(t))
t' = 1

INITIAL x 0.0 xdot 0.3 t 0
RANGE x -5 5 xdot 0 6.28 t 0 6.28
PERIODIC t 0 6.28 x 0 6.28
```

Die Variablen $t$ und $x$ werden dann als periodisch erkannt.

**Aufgabe X8:** Beweise oder widerlege für Vektorfelder $f$ im $\mathbb{R}^3$:
$\operatorname{div} f = 0 \Rightarrow f$ hat nichttriviales 1. Integral.