

Vorlesung “Einführung in die Dynamischen Systeme” (Wintersemester 2001/2002)

Jörg Härterich
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik I
Arnimallee 2-6, 14195 Berlin
haerter@math.fu-berlin.de

13. März 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Sieben Beispiele	3
1.1.1	Wachstum	3
1.1.2	Fibonacci Kaninchen	4
1.1.3	Volkswirtschaft	4
1.1.4	Newtonsche Gesetze und Planetenbewegung	5
1.1.5	Pendelgleichung	5
1.1.6	Ausbreitung einer Epidemie	6
1.1.7	Räuber-Beute-Systeme	6
1.2	Explizite Lösungen	7
1.2.1	Trennung der Variablen	7
1.2.2	Homogene Differentialgleichungen	10
1.2.3	Potenzreihenansatz	10
1.2.4	Lineare Differentialgleichungen	11
2	Grundbegriffe der Dynamik	11
2.1	Vektorfelder und Flüsse	11
2.1.1	Vom Fluss zur Differentialgleichung	12
2.1.2	Koordinatentransformationen	14
2.2	Nichtautonome Differentialgleichungen und Evolutionen	15
2.3	Diskrete Dynamische Systeme	16
2.4	Erhaltungsgrößen und Hamilton-Systeme	17
2.4.1	Hamilton-Systeme	18
2.5	Nichtlineare Pendel [Arnold, S.140–152]	20
2.6	Euler-Multiplikatoren	22
3	Existenz- und Eindeutigkeitssätze	25
3.1	Existenz	25
3.1.1	Der Banachsche Fixpunktsatz	25
3.1.2	Der Satz von Picard-Lindelöf	27
3.2	Fortsetzung von Lösungen	31
3.2.1	Maximales Existenzintervall	31
3.3	Stetige Abhängigkeit	34

3.3.1	Stetige Abhängigkeit von Parametern	35
3.4	Differenzierbare Abhängigkeit	35
3.5	Fluss und Differentialgleichung	39
3.6	Diskrete dynamische Systeme	40
4	Numerik von Differentialgleichungen	40
4.1	Eulersches Polygonzugverfahren	41
4.2	Einschrittverfahren	43
4.3	Schrittweitensteuerung	47
4.4	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	49
5	Lineare Gleichungen	50
5.1	Die Jordan-Normalform: Das Wichtigste in Kürze	50
5.2	Die Matrix-Exponentialfunktion	51
5.3	Autonome lineare Differentialgleichungen	53
5.3.1	Langzeitverhalten	55
5.3.2	Gleichungen höherer Ordnung	57
5.4	Lineare Differenzgleichungen	57
5.5	Klassifikation ebener linearer Differentialgleichungen	58
5.6	Variation-der-Konstanten	60
5.7	Nichtautonome lineare Differentialgleichungen	61
5.8	Der Satz von Liouville	62
6	Stabilität	64
6.1	Stabilität von Fixpunkten in diskreten Systemen	67
6.2	Stabilität von periodischen Lösungen, Floquet-Theorie	68
6.3	Kleiner Ausblick: Lyapunov-Exponenten	71
6.4	ω -Limesmengen	72
6.5	Lyapunov-Funktionen	74
6.6	Mittelung (Averaging)	76
7	Lokale Struktur von Vektorfeldern	79
7.1	Der Satz von der Begradigung	80
7.2	Der Satz von Grobman-Hartman	81
7.3	Stabile und instabile Mannigfaltigkeit	85
8	Ebene Vektorfelder	89
8.1	Der Satz von Poincaré-Bendixson	89
8.1.1	Beispiel: Brüsselator	91
8.1.2	Beispiel: Kaldors Konjunkturzyklus	93
A	Hilfsmittel aus Analysis I/II und Linearer Algebra I/II	95
A.1	Der Banachsche Fixpunktsatz, C^k -Version	95
A.2	Der Satz über implizite Funktionen	95
A.3	Matrixnormen	95
A.4	Abschneidefunktionen	95
B	Der Beweis des Satzes von Grobman–Hartman	95
C	(Nicht ganz unvoreingenommene) Kommentare zur Literatur	98