Weihnachtsblatt zur **Einführung in die Dynamischen Systeme**

J. Härterich

Bearbeitung völlig freiwillig

Aufgabe W1($*$)**:** Ein Dieb hat dem Weihnachtsmann alle seine Päckchen geklaut. Zur Zeit $t = 0$ beginnt der Dieb mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit Radius r entlangzulaufen. Der Weihnachtsmann startet ebenfalls zur Zeit $t = 0$ im Mittelpunkt des Kreises und läuft mit konstanter Geschwindigkeit w immer genau auf den Dieb zu. Mögliche Koordinaten sind beispielsweise die Entfernung $\varrho(t)$ zwischen Weihnachtsmann und Dieb und der Winkel $\theta(t)$ zwischen den Verbindungslinien vom Kreismittelpunkt zu den beiden Akteuren. Zeige, dass im Fall $w < v$ der Weihnachtsmann den Dieb nie erreicht, sondern sich immer mehr einer Kreisbahn annähert. Welchen Radius hat dieser Kreis ? Ist diese Kreisbahn ein stabiler periodischer Orbit? Wie sieht es für gut durchtrainierte Weihnachtsmänner ($w > v$) aus ?

Aufgabe W2: Seien $a(t)$, $f(t)$ und $g(t)$ stetig auf $[a, b]$. Weiter sei $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

und $z(t)$ eine Lösung von

$$\dot{z} = -A^*(t)z + g(t),$$

wobei wie in Aufgabe 35 $A^* = \overline{A}^T$ die zu A adjungierte Matrix ist. Zeige, dass für alle $a \leq t \leq b$ gilt:

$$\int_a^t [f(s) \cdot z(s) - x(s) \cdot g(s)] \; ds = x(t) \cdot z(t) - x(a) \cdot z(a).$$

Hinweis: $(Ay)^T z = y^T (A^* z)$

Aufgabe W3: An einem Brandenburger See wird fleißig nach Karpfen geangelt. Unter den Annahmen

- die Karpfen vermehren sich nach einer logistischen Gleichung, wenn überhaupt keine Angler vorhanden sind,
- die Menge der gefangenen Karpfen ist proportional sowohl zur Anzahl der Angler als auch zur Anzahl der Karpfen,
- die Anziehungskraft des Sees für Angler steigt proportional mit der Anzahl der Karpfen und nimmt proportional zur Anzahl der dort schon angelnden Kollegen ab

ist

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \alpha K(1-K) - KA \\ \dot{A} &= \beta K - A. \end{aligned}$$

ein Modell für die Anzahl K der Karpfen und die Anzahl A der Angler. Dabei sind $\alpha, \beta > 0$ Konstanten.

(i) Bestimme die Gleichgewichte und deren Stabilität.

(ii) Zeichne ein Phasenportrait.

(iii) Was ändert sich an den Gleichungen und am Verhalten der Lösungen, wenn man mit einer konstanten Rate neue Karpfen im See aussetzt ?

Aufgabe W4($*$): Sei $f : X \to X = \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz und bezeichne $J(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ das maximale Existenzintervall der Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0.$$

Beweise oder widerlege:

$$x_0 \mapsto t_+(x_0) \in (0, \infty]$$

ist stetig. Konvergenz ist dabei die Übliche in $\mathbb{R}$ bzw. gegen unendlich.

Aufgabe W5: Betrachte das gekoppelte lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D(y - x), \\ \dot{y} &= Ay + D(x - y), \end{aligned}$$

mit x, y in $\mathbb{R}^n$, $D = \operatorname{diag}(d_1 \ldots, d_n)$, wobei alle $d_i > 0$ sind. Außerdem sei $Re\ \sigma(A) < 0$.

(i) Zeige: wenn $x(0) = y(0)$, dann konvergieren $x(t), y(t)$ gegen 0 für $t \to +\infty$.

(ii) Finde trotzdem Matrizen A, D, so dass $x(t) \to \infty$ für gewisse $x(0)$, $y(0)$ und $t \to +\infty$.

Aufgabe W6: Berechne numerisch (etwa mit `dstool`) die Wronski-Matrix $W(t)$ zur Lösung $x(t)$ der Lorenz-Gleichung mit den Parametern $r = 28$, $s = 10$, $b = 8/3$ und der Anfangsbedingung $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 5$. Dazu ist natürlich die Gleichung *und* die linearisierte Lorenzgleichung einzugeben, d.h. man betrachtet insgesamt 12 Gleichungen. Für t wähle die Werte 10, 15, 16.5, Schrittweite zwischen 0.01 und 0.05, Runge–Kutta–Verfahren. Wie groß ist wohl der Betrag des größten Eigenwertes von $W(t)$ ungefähr (ganz grobe Schätzung)? Deutung? Versuche bis $t = 30$ zugehen. Was passiert? Deutung?
Aufgabe W7: Zeige, dass die allgemeine Lösung von

$$\ddot{u}(t) + u(t) = f(t)$$

die Gestalt

$$u(t) = a \cos t + b \sin t + \int_0^t f(s) \sin(t - s)\, ds$$

hat. Sei f 2π-periodisch. Zeige, dass $u(t)$ ebenfalls 2π-periodisch ist, falls gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(s) \sin s\, ds = \int_0^{2\pi} f(s) \cos s\, ds = 0.$$

Schöne Weihnachten und einen guten Start ins Neue Jahr !