Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 24.10.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Auf einer einsamen Insel gibt es n Städte und zwischen je zwei Städten genau eine direkte Verbindung durch eine Einbahnstraße. Konstruiere induktiv einen Weg auf der Insel, auf dem man jede Stadt genau einmal besucht, ohne die Verkehrsregeln zu verletzen.

Aufgabe 2: In Abessinien multiplizierte man früher nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{rr} 26 & 77 \\ 13 & \mathbf{154} \\ 6 & 308 \\ 3 & \mathbf{616} \\ 1 & \mathbf{1232} \\ \hline & 2002 \end{array}$$

also $26 \cdot 77 = 2002$.
Hier wurde also immer links halbiert, rechts verdoppelt und dann die rechte Spalte aufsummiert, ausgenommen alle Zeilen, in denen links gerade Zahlen stehen. Zeige Verständnis für die Abessinier und begründe ihr Verfahren.

Aufgabe 3: Beweise mit vollständiger Induktion den Satz über Binomial-Koeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Aufgabe 4: Und noch mehr Induktion ...
Zeige für alle $N \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

a)

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2$$

Freiwilliger Zusatz: Können Würfel der Kantenlängen $1, 2, 3, \ldots, 2001$ aus einem homogenen Material so auf zwei Waagschalen verteilt werden, dass die Waage im Gleichgewicht ist ?