Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 09.01.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 37:
Beweise die folgende Summenformel:

$$\sum_{i=0}^{N} \sin(nx) = \frac{\sin(\frac{N}{2}x)\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \qquad \text{falls } \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \neq 0$$

Aufgabe 38:
Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$?

Aufgabe 39:
Untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$\text{(i)} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x - 1} & \text{falls } x \neq 1 \\ -1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \qquad f(x) = \begin{cases} x^{1/q} & \text{falls } x \geq 0 \\ -|x|^{1/q} & \text{falls } x < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } q \in \mathbb{N} \text{ fest.}$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) = \begin{cases} \left| \left(\dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x} \right] \right) - \dfrac{1}{2} \right| & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

In (iii) bezeichnet wieder die *Gauss–Klammer* $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 40:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Geometrisch bedeutet das, dass der Graph von f unterhalb der Sehnen verläuft.
Zeige, dass konvexe Funktionen immer stetig sind.

Tipp: Argumentiere indirekt und nimm an, dass f in einem Punkt x_0 unstetig ist. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge x_n mit $x_n \to x_0$, so dass $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$.

Frohe Weihnachten und alles Gute für 2003 !