Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 16.01.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 41:
Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert $y \in \mathbb{R}$

(i) genau zweimal

(ii) genau dreimal

annimmt ?

Aufgabe 42:
Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls eine Zahl $L > 0$ existiert, so dass für beliebige $x, y \in D$ gilt:

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|.$$

(i) Zeige dass Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.

(ii) Zeige, dass $f(x) = \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist auf $[0, \infty)$.

(iii) Seien f und g Lipschitz-stetig. Dann sind auch $f + g$ und $max(f, g)$ Lipschitz-stetige Funktionen.

(iv) Sei f Lipschitz-stetig und $|f(x)| \geq \delta > 0$. Zeige, dass dann auch $\frac{1}{f}$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 43:
Zeige, dass die Gleichung $e^{-x} = x$ genau eine reelle Lösung x_0 besitzt und benutze den Zwischenwertsatz, um x_0 mit dem Taschenrechner o.ä. auf zwei Nachkommastellen zu berechnen.

Aufgabe 44:
Betrachte den Vektorraum X aller beschränkten reellen Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Norm

$$\|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

(i) Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Norm handelt.

(ii) Ist X vollständig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$?