Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 23.1.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 45:
Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle. Betrachte zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen $f_n : [a, b] \to [c, d]$ sowie $g_n : [c, d] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})} &= 0, \\ \|g_n - g\|_{\mathrm{C}([c,d],\mathbb{R})} &= 0. \end{aligned}$$

Zeige, dass dann auch die Verkettung $g_n \circ f_n$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergiert.

Aufgabe 46:
Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen f_n punktweise bzw. gleichmäßig auf dem Intervall I:

(i) $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$ auf $I = \mathbb{R}$,

(ii) $\quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{für } 0 \le x < 1/n, \\ 2n - n^2x & \text{für } 1/n \le x < 2/n, \\ 0 & \text{für } 2/n \le x \le 1 \end{cases}$ $\qquad$ auf $I = [0, 1]$,

(iii) $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(kx)}{k^2}$ auf $I = \mathbb{R}$.

Aufgabe 47:
Untersuche, ob und wo die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar oder stetig differenzierbar sind:

(i) $\quad f(x) = \begin{cases} x \cdot |x|^a, \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ fest, falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \end{cases}$

(ii) $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q^2}, \text{ falls } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd} \\ \\ 0 \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(iii) $\quad f(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x \le 0 \\ e^{-1/x^2}, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$

Aufgabe 48:
Die Zacken-Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \left| x - [x + \frac{1}{2}] \right|$$

ist periodisch (d.h. $g(x + 1) = g(x)$) und differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} g(4^j \cdot x)$$

stetig, aber nirgendwo differenzierbar ist.
Betrachte dazu beispielsweise zu gegebenem x_0 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $|x_n - x_0| = 4^{-n}$, für die man die Quotienten

$$\frac{g(4^j x_n) - g(4^j x_0)}{4^j(x_n - x_0)}$$

relativ leicht berechnen kann.

Klausur–Infos

Die Klausur findet am **Donnerstag 30.1.2003** von 10.15-11.00 Uhr im Hörsaal 001, Arnimallee 3 statt.
Es sind *keine* Hilfsmittel zugelassen.
Die Klausur besteht aus 10 Fragen, die aus den drei Kernfragen–Katalogen stammen.
Für jede Frage gibt es maximal 2 Punkte, insgesamt also höchstens 20 Punkte. Die Klausur gilt mit 9 Punkten als bestanden.
Für benotete Scheine gilt folgende Tabelle:

18-20 Punkte	Note „sehr gut“
15-17 Punkte	Note „gut“
12-14 Punkte	Note „befriedigend“
9-11 Punkte	Note „ausreichend“
0-8 Punkte	nicht bestanden

Bitte Studentenausweis und Personalausweis mitbringen !

Wichtig !
Im Anschluss an die Klausur findet von 11.15–12.00 Uhr ganz normal Vorlesung statt.