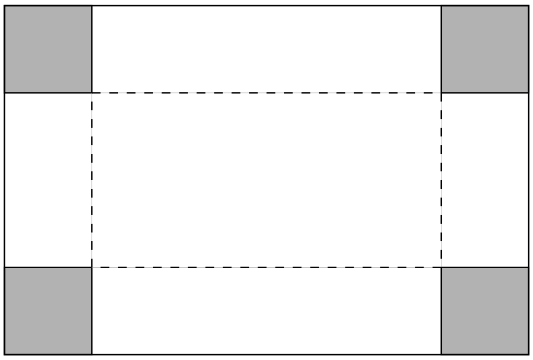
Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 30.1.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 49:
Ein Mathematiker möchte aus einer rechteckigen Glasplatte mit Seitenlängen $2a$ und $3a$ ein quaderförmiges Aquarium bauen. Dazu schneidet er an den Ecken kleine Quadrate der Seitenlänge h ab ($\rightsquigarrow$ Abfall) und zerlegt den Rest der Platte in fünf Rechtecke:



Als echter Tierfreund will er seinen Fischen natürlich ein möglichst großes Becken bieten. Wie muss er h wählen, damit das Volumen maximal wird ?

Aufgabe 50:
Untersuche, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechne ihre Ableitung:

(i) $f_1(x) = x^2 e^{-3x}$, (ii) $f_2(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) $f_3(x) = \log(\log x)$, (iv) $f_4(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

Aufgabe 51:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige die Äquivalenz

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Longleftrightarrow f \text{ konstant auf } I.$$

Aufgabe 52:
Sei f auf (a,b) differenzierbar. Dann erfüllt die Ableitung f', die nicht notwendigerweise stetig ist, den Zwischenwertsatz.
Zeige also, dass für alle $\alpha, \beta \in (a,b)$ und alle c zwischen $f'(\alpha)$ und $f'(\beta)$ ein γ zwischen α und β mit $f'(\gamma) = c$ existiert.