Übungen zu Analysis I

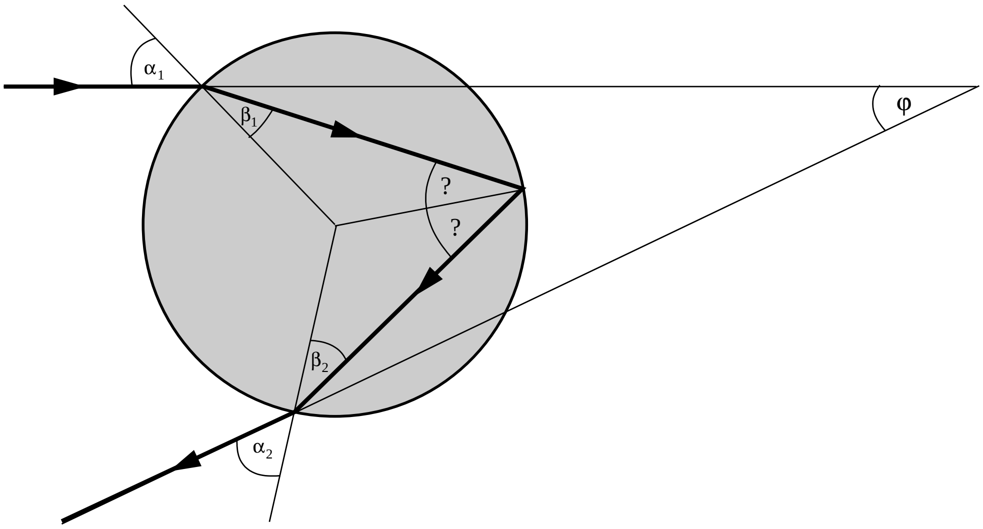
B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 6.2.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 53:
Ein Regenbogen entsteht, wenn Sonnenstrahlen an der Oberfläche eines Regentropfen gebrochen, im Tropfen reflektiert und beim Austritt aus dem Tropfen wieder gebrochen werden. Wir nehmen an, dass Regentropfen einen kreisförmigen Querschnitt haben. Berechne unter Benutzung des Brechungsgesetzes

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} = n = \frac{4}{3}, \quad i = 1, 2$$

den Winkel φ zwischen einfallendem und austretendem Strahl in Abhängigkeit von α_1.



Welches ist der maximal auftretende Winkel φ und was hat dieser mit dem Winkel zu tun, unter dem man den Regenbogen am Himmel sieht?
(Um auch noch die Farbfolge zu erklären muss man nur wissen, dass n von der Wellenlänge abhängt. Wie kann ein zweiter Regenbogen entstehen ?)

Aufgabe 54:
Bestimme folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1); \quad a > 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{1/x}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log \cos ax}{\log \cos bx}; \qquad a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$

Aufgabe 55:
Untersuche, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Grenzwerte existieren, und bestimme sie gegebenenfalls:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{|x|^\alpha}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{\log x}$

Aufgabe 56:
Mit Hilfe des Newton-Verfahrens sollen die reellen Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^5 - x$ berechnet werden. Zeige:

(i) Wählt man den Startwert $x_0 > 1$, dann konvergiert das Newton-Verfahren monoton gegen 1, d.h. für die Newton–Folge x_n gilt $x_n \searrow 1$.

(ii) Man kann einen Startwert $0 < x_0 < 1$ wählen, so dass das Newton-Verfahren immer zwischen den Werten $\pm x_0$ hin- und herspringt (und daher nicht konvergiert). Zeichnung !