Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 7.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 9:
Ein armer Mathematiker wohnt im fünften Stock eines Berliner Mietshauses und muss deshalb jeden Abend N Treppenstufen überwinden. Bei jedem Schritt steigt er eine oder zwei Stufen hoch. Um sich nicht zu langweilen, möchte er sich jeden Abend seinen Weg anders einteilen. Wieviele Möglichkeiten hat er dazu ? Muss er aus Langeweile schon bald wieder seine Möbel packen?

Aufgabe 10:
Berechne

$$\sum_{i=1}^{10^6} i^4$$

exakt!
Anschließend(!) kannst Du gerne – freiwillig – Dein Ergebnis mit `MATLAB` oder mit `MATHEMATICA` (z.B. mit Hilfe des Befehls `Sum` oder einer einfachen `Do`-Schleife) überprüfen.

Aufgabe 11:

(i) Finde eine bijektive Abbildung, die die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abbildet auf die Menge $M_0 = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\{0,1\}$.

(ii) Für welche Mengen $A \neq \emptyset$ ist die Menge $M = \{f : \mathbb{N} \to A\}$ endlich, abzählbar bzw. überabzählbar?

(iii) Für welche Mengen $A \neq \emptyset$ ist die Menge $\tilde{M} = \{f : A \to \mathbb{N}\}$ endlich, abzählbar bzw. überabzählbar?

Aufgabe 12:
Wir bezeichnen mit x_n die Fibonacci-Folge, die rekursiv definiert ist durch

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1 \text{ und } x_0 = x_1 = 1.$$

Zeige, dass $x_{n+1} \cdot x_{n-1} = x_n^2 + (-1)^{n+1}$ für alle $n \geq 1$.

Freiwilliger Zusatz: Beweise die Formel

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} = x_n$$

und interpretiere diese Gleichung kombinatorisch anhand des Beispiels aus Aufgabe 9.