Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 14.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 13:
Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Beweise oder widerlege folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
\sup(A+B) &= \sup(A)+\sup(B), \text{ wobei } A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\} \\
\sup(A\cdot B) &= \sup(A)\cdot\sup(B), \text{ wobei } A\cdot B = \{a\cdot b \mid a \in A,\ b \in B\} \\
\sup(A\cup B) &= \max\{\sup A,\ \sup B\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14:
Die Potenzen $x^\alpha, x \in \mathbb{R}^+, \alpha = p/q \in \mathbb{Q}^+$ seien wie in der Vorlesung erklärt durch

$$y = x^{p/q} \Leftrightarrow y = \sup\{z \in \mathbb{R}^+ \mid z^q < x^p\}.$$

Zeige mindestens eine der Rechenregeln

(i) $x^\alpha \cdot y^\alpha = (x\cdot y)^\alpha$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und festes $\alpha \in \mathbb{Q}^+$,

(ii) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und feste $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^+$.

Dabei dürfen diese Rechenregeln für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ natürlich benutzt werden.

Aufgabe 15 ("Intervallschachtelung"):
Gegeben seien die Intervalle

$$I_n := [a_n, b_n],\ a_n \le b_n \text{ mit } I_{n+1} \subseteq I_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \text{ in } \mathbb{R}.$$

Aufgabe 16:
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt

(i) $\mathrm{Re}\,(z^2) > 0$

(ii) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 1$

(iii) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| \le 1$