Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 21.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 17:
Von den Mathematikern Banach und Mazur stammt die Idee zu folgendem „Spiel“:
Zwei Personen A und B konstruieren gemeinsam eine Intervallschachtelung.
Das geht so: A beginnt und wählt ein beliebiges Intervall $[x_1, y_1] \subset \mathbb{R}$. Dann darf B ein beliebiges Intervall $[x_2, y_2] \subset [x_1, y_1]$ bestimmen, dessen Länge kleiner als 1/2 sein muss. Nun ist wieder A am Zug und wählt ein Intervall $[x_3, y_3] \subset [x_2, y_2]$, dessen Länge kleiner als 1/3 ist. So geht das (unendlich lange) weiter. Wie wir aus Aufgabe 15 wissen, besteht der Durchschnitt $\cap_{n=1}^{\infty}[x_n, y_n]$ schließlich aus einer einzigen reellen Zahl.
Spieler A gewinnt, falls diese Zahl irrational ist, ansonsten ist Spieler B der Sieger.
Kannst Du für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie angeben ?

Aufgabe 18:
Beweise oder widerlege: Jede Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge.

Aufgabe 19:
Sei x_n eine Folge reeller Zahlen und

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

die Folge der Mittelwerte.

(i) Zeige, dass die Mittelwerte a_n konvergieren, wenn die x_n konvergieren. Was ist dann der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$?

(ii) Finde eine divergente Folge x_n, so dass die Folge der Mittelwerte a_n trotzdem konvergiert.

Aufgabe 20:
Bestimme alle Häufungswerte der reell- oder komplexwertigen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(i) $x_n = i^n + \dfrac{1}{n^2}$

(ii) $x_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$

(iii) x_n ist eine Abzählung der rationalen Zahlen.

Als eine Art **„Schwarzes Brett“ zur Vorlesung** haben wir unter

`foren.spline.inf.fu-berlin.de`

ein Forum eingerichtet. Hier kann sich jede/r, der/die einen Account am Fachbereich hat, registrieren und dann Beiträge (Fragen zur Vorlesung, Ankündigung einer Lerngruppe, . . .) posten.