Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 28.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 21:
Zeige Konvergenz und bestimme die Grenzwerte der folgenden Zahlenfolgen x_n für $n \to \infty$:

(i) $x_n = \dfrac{3n^2 + 5\sqrt{n} - 2}{7n^2 - 4n + 1}$,

(ii) $x_n = \dfrac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_p n^p}$, für fest gegebene $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq p}$ und $b_p \neq 0$,

(iii) $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$,

(iv) $x_n = (3^n + 2^n)^{1/n}$

Aufgabe 22:
Beweise: Jede konvergente Folge erfüllt das Cauchy-Kriterium!

Aufgabe 23:
Seien $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte, reelle Folgen. Zeige

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} y_n + \liminf_{n\to\infty} z_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(y_n + z_n) \leq \liminf_{n\to\infty} y_n + \limsup_{n\to\infty} z_n \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}(y_n + z_n) \leq \limsup_{n\to\infty} y_n + \limsup_{n\to\infty} z_n
\end{aligned}$$

und finde ein Beispiel, bei dem überall "$<$" gilt.

Aufgabe 24:
Betrachte die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{12} - 2^7}{12 x_n^{11}}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

mit Startwert $x_0 = 2$.
Beweise, dass der Grenzwert

$$Q := \lim_{n\to\infty} x_n$$

existiert. Welche polynomiale Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten löst der Grenzwert Q? Was hat Q mit Musik zu tun ?

Freiwillig: Berechne x_n für $n = 1, 2, \ldots, 9$ mit `MATLAB` (oder `MATHEMATICA` oder `MAPLE`). Versuche den Grenzwert Q auf vier Nachkommastellen genau zu bestimmen.
Wähle auch andere Startwerte x_0. Was passiert für Startwerte $0 < x_0 < Q$? Wie viele Iterationen braucht man von $x_0 = \frac{3}{2}$ (alias „reine Quinte"), um Q auf vier Stellen genau zu berechnen?
Experimentiere auch mit komplexen Anfangswerten $x_0 \in \mathbb{C}$. Konvergiert die Folge immer noch ? Gegen Q ? Falls Deine Folge gegen eine andere Zahl konvergiert, erfüllt diese ebenfalls die polynomiale Gleichung von oben?