Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 5.12.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 25:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeige: Falls die Teilfolgen a_{2n}, a_{2n+1} und a_{5n} konvergieren, so konvergiert auch die ganze Folge a_n.

Aufgabe 26:
Präzisiere und berechne den Wert des Kettenbruches

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cdots}}}$$

für beliebiges $a \in \mathbb{N}^+$.
Gibt es eine natürliche Zahl a, so dass dieser Kettenbruch rational ist ?

Aufgabe 27:
Eine „Kettenwurzel“

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

kann erklärt werden als der Grenzwert einer Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$w_1 := \sqrt{1} = 1 \text{ und } w_{n+1} := \sqrt{1+w_n}.$$

Zeige, dass dieser Grenzwert existiert und berechne ihn.

Aufgabe 28:
Ein Kettenbruch

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}$$

heißt periodisch, falls die Folge der $a_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ schließlich periodisch wird, das heißt, falls für eine feste Periode $p \in \mathbb{N}$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt $a_{k+p} = a_k$ für alle $k \geq k_0$. Zeige, dass periodische Kettenbrüche stets Lösungen quadratischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten sind, also

$$b\alpha^2 + c\alpha + d = 0 \qquad \text{für geeignete } \ b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Tip: Zeige zunächst, dass die Reste

$$r_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}+\cfrac{1}{a_{n+2}+\cdots}}$$

der Gleichung

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}$$

genügen, wobei sich die Vektoren $(q_n, p_n) = z_n \in \mathbb{N}^2$ aus der Iteration

$$z_{n+1} = a_n z_n + z_{n-1},\ n \geq 1 \ \text{ mit Startwerten } z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

berechnen.
Beachte, dass man auch

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{r_k}}}$$

mit Hilfe der Rekursion berechnen kann, allerdings mit $a_{k-1} + \frac{1}{r_k}$ statt a_{k-1}.