Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 12.12.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 29:
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls die Grenzwerte:

$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ $\qquad (ii)\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}+\ldots$

$(iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$ $\qquad (iv)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Aufgabe 30:
Eine unsterbliche Schnecke kriecht auf einem zunächst 1 km langen Gummiseil jede Nacht um 1 cm auf einen furchtsamen, aber gleichfalls unsterblichen Mathematiker zu, der das Seilende hält und das Seil aus Angst vor der Schnecke immer am folgenden Tag um 1 km dehnt. Erreicht die Schnecke je den Mathematiker?

Aufgabe 31:
Prüfe, ob folgende Reihen konvergieren:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$

Aufgabe 32:
Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f:[0,1) &\to [0,1) \\ x &\mapsto 10\cdot x-[10\cdot x], \end{aligned}$$

wobei die Gauss–Klammer $[y]$ die größte ganze Zahl $\leq y$ bezeichnet.
Zeichne den Graphen der Abbildung f.
Bezeichne mit $f^n = f\circ f\circ\ldots\circ f$ die n-mal iterierte Abbildung. Außerdem sei $f^0(x)=x$. Ordne nun jedem Startwert $x_0\in[0,1)$ die Folge α_n mit

$$\alpha_n = [10\cdot f^n(x_0)]$$

zu und interpretiere diese Folge (*Tipp: Dezimaldarstellung von* x_0).
Für welche Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\alpha_n\in\{0,1,2,\ldots,9\}$ kann man umgekehrt einen Startwert x_0 finden, so dass $\alpha_n=[10\cdot f^n(x_0)]$ für alle n gilt ? Schreibe x_0 als unendliche Summe.
Beschreibe die Menge der Startwerte x_0, für die die Folge α_n schließlich periodisch wird, das heißt $\alpha_{n+p}=x_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$ und eine feste Periode p?