Übungen zu Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 19.12.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 33:

Seien a_n und b_n Folgen reeller Zahlen. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$ konvergiert, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^2 + \sum_{n=0}^{\infty}(b_n)^2 < \infty.$$

Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$ absolut ?

Aufgabe 34:

Beweise oder widerlege:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert

Aufgabe 35:

Betrachte die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =: s$, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

(i) Beschreibe eine divergente Umordnung der Reihe.

(ii) Beschreibe eine Umordnung der Reihe, so dass die Partialsummen gegen 2002 konvergieren.

(iii) Zeige, dass für die Umordnung, bei der sich immer ein positives Glied und zwei negative Glieder abwechseln, gilt:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - - \ldots = \frac{s}{2}.$$

Aufgabe 36:

Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n \qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)2^k}{k^k} x^k$$

$$(iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \qquad (iv) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{m} x^k \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \text{ fest}$$