Freiwillige Weihnachtsaufgaben

B. Fiedler, J. Härterich

Aufgabe W1:
Bestimme α, $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x < -2 \\ \alpha x^2 + \beta & \text{für } -2 \leq x < 1 \\ 1/x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe W2:
Auf einem Tisch in Pisa wird ein Turm aus aufeinander gelegten, nicht verklebten Bausteinen errichtet. Die Steine sind quaderförmig und völlig identisch. Kann man den Turm beliebig weit über die Tischkante hinaus bauen?

Aufgabe W3:
Ein punktförmiger Mathe-Prof jagt einen ebenfalls punktförmigen Mathe-Studenten in einem Hörsaal $H = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Der Studi und der Prof können sich mit exakt derselben Maximalgeschwindigkeit bewegen.
Kriegt der Prof den klugen Studi ?

Aufgabe W4:
Prüfe, ob folgende Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren:

(i) $a_n = (\sqrt[n]{a} - 1)^n, a > 0$

(ii) $a_n = \dfrac{1}{(5 + (-1)^n)^n}$

Aufgabe W5:
Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$?

Aufgabe W6:
Untersuche die Folgen a_n auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert für $n \to \infty$:

(i) $a_n = \dfrac{1 + 11 + 111 + \ldots + \overbrace{11\ldots11}^{n \text{ Einsen}}}{10^n}$

(ii) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(iii) $a_n = \sqrt[n]{3\sin^2(2002n) + \cos^2(2003n)}$

(iv) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$

Aufgabe W7:
Eine Expedition macht sich zum Besuch beim Weihnachtsmann am Nordpol auf. Ihr Raupenfahrzeug verbraucht 1 Liter Glühwein pro Kilometer und besitzt einen Tank, der genau 1000 Liter Glühwein fasst. Das Basislager befindet sich exakt 2000 Kilometer vom Nordpol entfernt und verfügt über unbegrenzte Glühweinvorräte. Unterwegs kann die Expedition beliebig große Vorratstanks anlegen.
Wie viele Liter Glühwein werden (mindestens) benötigt, um vom Basislager zum Nordpol zu gelangen ?
Tipp für den Rückweg: Der Weihnachtsmann besitzt ebenfalls einen unendlich großen Glühweinvorrat.

Aufgabe W8:
Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

(i) $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \leq n^{n(n+1)/2}$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

(iii) $9^n - 8n - 1$ ist durch 64 teilbar falls $n \geq 2$.

Aufgabe W9:
Die Folge c_n sei rekursiv definiert durch

$$c_{n+1} = \frac{2 + c_n}{1 + c_n} = 1 + \frac{1}{1 + c_n}$$

mit Anfangswert $c_1 = 1$. Entscheide, ob die Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe W10:
Sei a_n eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Zeige die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{a_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1^2}{a_2 - a_1 + \cfrac{a_2^2}{a_3 - a_2 + \cfrac{a_3^2}{a_4 - a_3 + \ldots}}}}.$$

Welche unendliche Reihe hängt also eng mit Brounckers „unechtem Kettenbruch“

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots}}}}$$

zusammen ?

Aufgabe W11:
Zeige, dass für jede Folge a_n mit positiven Gliedern die Ungleichungskette

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

gilt.

Aufgabe W12:
Zeige, dass am 24.12. um 12 Uhr MEZ an zwei Punkten auf dem Äquator dieselbe Temperatur herrscht.

Aufgabe W13:
Betrachte die unendliche Reihe, die entsteht, wenn man aus der (divergenten) harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{n}$ alle Glieder weglässt, deren Dezimaldarstellung die Ziffer 7 enthält.
Konvergiert oder divergiert diese neue Reihe ?

Aufgabe W14:
Definiere eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $p_0 := 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$\frac{1}{0!}p_n + \frac{1}{1!}p_{n-1} + \frac{1}{2!}p_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n!}p_0 = 1.$$

Zeige Konvergenz und finde den Grenzwert der Folge.

Aufgabe W15:
Betrachte eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $I := \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ ist unstetig in } x\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f.
Zeige dass I endlich oder abzählbar ist!

Aufgabe W16:
Formuliere und poste einen eigenen mathematischen Beitrag in unserem Ana1-Forum unter

`http://foren.spline.inf.fu-berlin.de`

Sicher fallen Dir in den besinnlichen Tagen Fragen oder Kommentare zur Vorlesung oder zu den Übungen ein, die für alle von Interesse sind. Für diese Aufgabe kann natürlich nur Punkte bekommen, wer seinen Beitrag auch mit vollem Namen unterschreibt ;-)

- Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist völlig freiwillig (Abgabe: 16.01.2003)
- Nur bearbeitete Aufgaben werden auch besprochen.
- Punkte für Lösungen werden wie regulär erzielte Punkte angerechnet.

Alles Gute für 2003!