

# KERNFRAGEN Nr. 4 zur Differentiation

... die hoffentlich immer noch jeder beantworten kann:

1. Wann heißt eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar? Gib eine geometrische Interpretation der Ableitung.
2. Gib Beispiele für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die
  - (i) stetig, aber nicht differenzierbar in  $x_0$
  - (ii) differenzierbar, aber nicht gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$
  - (iii) differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar in  $x_0$  sind.
3. Was bedeuten die Symbole  $o(h)$ ,  $O(h^2)$  und  $o(1)$ ?
4. Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $|x|^\alpha$  in  $x = 0$  differenzierbar?
5. Formuliere und beweise die Produktregel.
6. Wie lauten Quotienten- und Kettenregel?
7. Berechne die Ableitung von  $f$  für

$$f(x) = e^x \sin x, \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad f(x) = e^{-x^2} \text{ und } f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

8. Gib Bedingungen an, so dass die Umkehrfunktion von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert und differenzierbar in  $f(x_0)$  ist.
9. Formuliere den Mittelwertsatz und den Satz von Rolle.
10. Skizziere einen Beweis des Satzes von Rolle.
11. Wie lauten die Regeln von L'Hôpital?
12. Berechne  $\lim_{x \rightarrow 0}$  für
$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x - 1}{x^2}, \quad \frac{\log(1+x)}{x} \quad \text{und} \quad \frac{x}{e^x - 1}.$$
13. Gib eine notwendige und eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine differenzierbare Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  ein lokales Maximum hat.
14. Wann heißt eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvex bzw. strikt konvex?

15. Wie hängen bei zweimal differenzierbaren Funktionen Konvexität bzw. strikte Konvexität mit der 2. Ableitung von  $f$  zusammen ?
16. Wieviele Minima kann eine strikt konvexe Funktion haben?
17. Sei  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Wo ist  $f$  differenzierbar? Wie lautet die Ableitung  $f'$  ?
18. Wie ist der Raum  $BC^1$  definiert? Was bedeutet die Vollständigkeit von  $BC^1$  für die Vertauschung von Grenzübergängen und Differentiation?
19. Wie lautet das  $n$ -te Taylorpolynom? Gib einen Ausdruck für das Restglied an.
20. Wann wird eine Funktion durch ihre Taylorreihe dargestellt? Gib Beispiele und Gegenbeispiele.
21. Wie lautet die Taylorreihe in  $x_0 = 0$  zu  $(1+x)^\alpha$  bzw. zu  $\log(1+x)$ ?