

# KERNFRAGEN Nr. 2 über Folgen und Reihen

... die hoffentlich jeder beantworten kann:

1. Wann nennt man eine Folge  $x_n$  von reellen Zahlen konvergent, wann uneigentlich konvergent und wann divergent? Wie ist der Grenzwert einer Folge definiert?
2. Was sind Supremum und Infimum der Folgen  $(1 + \frac{1}{n})^n$  und  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ?
3. Wie sind die Häufungswerte einer Folge  $a_n$  definiert? Was sind die Häufungswerte der Folge  $\left( (-1)^n + \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ?
4. Was sind Limes superior und Limes inferior einer reellen Folge? Wann existieren sie? Wann stimmen Limes superior und Limes inferior überein?  
Kann man den Limes superior auch für komplexwertige Folgen definieren?
5. Was besagt das Konvergenzkriterium von Cauchy?  
Warum gilt das Cauchy-Kriterium?
6. Welche monotonen Folgen besitzen einen Grenzwert?
7. Welche dieser Folgen  $a_n$  konvergieren:

$$a_n = \frac{n^2}{3n-2}, \quad a_n = \frac{n^2-2}{3n^2+1}, \quad a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad a_n = q^{1/n} \quad \text{und} \quad a_n = \sqrt[n]{n}$$

Bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

8. Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?
9. Wann heißt eine Reihe konvergent, wann absolut konvergent?
10. Für welche  $q$  existiert  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ? Was ist der Wert dieser Summe?
11. Zeige, dass die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert.
12. Formuliere das Cauchy-, das Majoranten- und das Verdichtungskriterium für Konvergenz von unendlichen Reihen.

13. Erläutere das Wurzel- und das Quotienten-Kriterium.

Bei welchen der folgenden Reihen an, kann man mit Hilfe des Quotienten-Kriteriums über Konvergenz oder Divergenz entscheiden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$$

14. Wann heißt eine Reihe absolut konvergent?

15. Formuliere das Leibniz-Kriterium.

16. Formuliere den großen und kleinen Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen.

17. Welche der Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergieren, welche konvergieren absolut:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{und} \quad a_n = \frac{x^n}{n!} \quad \text{mit } x \in \mathbb{C}$$

18. Was ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ?

19. Was ist das Produkt zweier Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  ?  
Voraussetzungen ?

20. Was sind die Reihen für  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sinh$  und  $\cosh$  ?

21. Wie hängen  $e^x$ ,  $\cos x$  und  $\sin x$  im Komplexen zusammen?