Freiwillige Ferienaufgaben zur Analysis I

B. Fiedler, J. Härterich

Aufgabe X1:
Die Funktion f sei k-mal stetig differenzierbar im offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Weiter sei für ein $a \in J$

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$$

und

$$f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Muss f dann im Punkt a ein lokales Minimum oder Maximum haben? Unterscheide insbesondere die Fälle k gerade und k ungerade.

Aufgabe X2:
Seien f und g zwei k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Zeige induktiv die Leibniz-Regel

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

für die k-te Ableitung der Funktion $f \cdot g$.

Aufgabe X3:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, dass

$$f(x) = \sup \{g(x);\ g \text{ affin linear und } g(y) \leq f(y) \text{ für alle } \ y\}.$$

Dabei heißt $g = g(y)$ affin linear, wenn g die Gestalt

$$g(y) = ay + b$$

mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe X4:
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $|x|^a \sin(|x|^b)$ stetig bzw. differenzierbar bzw. stetig differenzierbar?

Aufgabe X5:
Berechne
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)} \ .$$

Aufgabe X6:
Auf einer Autobahn fahren Autos der Länge l mit einem Sicherheitsabstand d, wie ihn die Polizei empfiehlt. Insbesondere ist d proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v. Bei welcher Geschwindigkeit ist die Anzahl der durchfahrenden Autos pro Stunde maximal, falls alle gleich schnell fahren? Berechne das Maximum auch für realistische Sicherheitsabstände, z.B. 100 m bei v=100 km/h.

Aufgabe X7:
Beweise den *Abelschen Grenzwertsatz*: Sei $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 1$. Außerdem sei $S(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann ist $S(1) = \lim_{x\nearrow 1} S(x)$.

(i) Setze $r_n := S(1) - \sum_{k=0}^{n} a_k$ und zeige, dass es für $|x| < 1$ zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ einen von x unabhängigen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} r_n x^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{1 - |x|}.$$

(ii) Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ für jedes feste x mit $|x| < 1$ konvergiert.

(iii) Zeige: $(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = S(x) - S(1)$.

(iv) Folgere nun den Abelschen Grenzwertsatz, indem Du die Summe aus (iii) geeignet zerlegst und abschätzt.

N.B.: Mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes erhält man beispielsweise aus der Arcustangens-Reihe die Identität
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$
und aus der Logarithmus-Reihe
$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots .$$

Aufgabe X8 [Putnam-Wettbewerb 1998]:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x_0) \cdot f'(x_0) \cdot f''(x_0) \cdot f'''(x_0) \geq 0$$

ist.

Aufgabe X9:
Berechne

(i) $\frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\Theta), \qquad$ für $\Theta \in \mathbb{R}$ und $|r| < 1$,

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\Theta)}{k!}, \qquad$ für $\Theta \in \mathbb{R}$

Aufgabe X10:
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positive reelle Zahlen mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.

(i) Zeige, dass für beliebige $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ die *Konvexkombination* $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ ebenfalls in I liegt und dass die *Jensensche Ungleichung*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

gilt.

(ii) Falls f strikt konvex ist, dann gilt Gleichheit in der Jensenschen Ungleichung genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

(iii) Zeige durch geeignete Wahl von f, dass für beliebige positive Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ gilt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Im Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ erhält man daraus die *arithmethisch-geometrische Ungleichung*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Aufgabe X11:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.
Zeige:

(i) Falls f keine doppelte Nullstelle in I hat (d.h. die Ableitung in den Nullstellen ist nicht 0), so hat f höchstens endlich viele Nullstellen in I.

(ii) Falls f analytisch ist und $f \not\equiv 0$, so hat f höchstens endlich viele Nullstellen in I.

Aufgabe X12:
Zeige, dass auf dem Raum $BC^1([-1,1])$ der stetig differenzierbaren Funktionen durch

$$\|f\|_* = \|f\|_{BC^0} + |f'(0)|$$

und

$$\|f\|_{**} = \|f'\|_{BC^0} + |f(0)|$$

jeweils eine Norm definiert wird. Ist $BC^1([-1,1])$ vollständig bezüglich dieser Normen?

Aufgabe X13:
Welche der folgenden Funktionenfolgen $f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig, d.h. in BC^0? Bestimme gegebenenfalls die Grenzfunktion und prüfe auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Konvergieren auch die Ableitungen?

(i) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad$ für $\quad x \in (-1,1)$

(ii) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k \cdot x^k} \quad$ für $\quad x \in [1,\infty)$

(iii) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad$ für $\quad |x| \le c$

(iv) $f_0(x) = \sqrt{x},\ f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} \quad$ für $\quad x \ge 0$

(v) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe X14:
Die *Zeta-Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}.$$

Zeige, dass die Zeta-Funktion für $x > 1$ unendlich oft differenzierbar ist. Beweise weiter die Eulersche Produktdarstellung

$$\zeta(x) = \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{1 - p^{-x}}.$$

Aufgabe X15:
Zeige, dass die Funktion
$$\chi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$
auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist. Benutze χ, um eine monoton wachsende, unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu konstruieren, für die gilt:
$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \leq 0 \\ 1 & , \text{ falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Aufgabe X16 [Putnam–Wettbewerb 1993]:
Zwei reelle Zahlen x und y werden zufällig aus dem Intervall $(0,1)$ ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Quotient x/y näher an einer geraden Zahl als an einer ungeraden Zahl liegt ?
Betrachte dazu das Quadrat $Q = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ und berechne den Flächeninhalt der Menge
$$G = \{(x,y) \in Q;\ x/y \text{ liegt näher an einer geraden Zahl als an einer ungeraden Zahl } \}$$
als eine unendliche Summe.

Aufgabe X17:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und es gelte $f(0) = 0$. Definiere
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ f'(0), & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
Zeige, dass g stetig differenzierbar ist.

Aufgabe X18:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f'' > 0$. Gegeben sei ein beliebiger Startwert x_0 des Newton-Verfahrens mit $f'(x_0) \neq 0$.
Zeige, dass das Newton-Verfahren gegen eine Nullstelle von f konvergiert, falls f nicht überall positiv ist. Zeige auch, dass die Konvergenz spätestens nach einem Schritt monoton ist.

Aufgabe X19:
Wir wollen für $f(x) = x + \sin x \cos x$ und $g(x) = f(x) \cdot e^{-\sin x}$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bestimmen. Dazu berechnen wir

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{2\cos x - x - \sin x \cos x} \cdot e^{\sin x}.$$

Offensichtlich konvergiert die rechte Seite gegen 0, falls $x \to \infty$. Andererseits hat aber

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{\sin x}$$

keinen Grenzwert für $x \to \infty$. Warum versagt hier die Regel von L'Hôspital?

Aufgabe X20:
Skizziere die Graphen der Funktionen $\tan(x), \cot(x), \sinh(x), \cosh(x), \tanh(x)$ und $\coth(x)$. Bestimme insbesondere Monotonieabschnitte und Extrema der Funktionen und ihrer Ableitungen. Finde nun sinnvolle Definitionsbereiche für die jeweiligen Umkehrfunktionen. Wo sind die Umkehrfunktionen differenzierbar?

- Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben variiert stark ;-)
- Die Aufgaben sind völlig freiwillig und müssen nicht abgegeben werden.
- **Bearbeitete** Aufgaben können im Tutorium zu Beginn des Sommersemesters besprochen werden.

Schöne Ferien !!!