KERNFRAGEN Nr. 3 zur Stetigkeit

... die hoffentlich immer noch jeder beantworten kann:

1. Wann heißt f stetig in einem Punkt x_0?
   Gib drei verschiedene Definitionen (Umgebungen, Folgen, $\epsilon - \delta$).

2. Wann heißt f stetig auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $D \subseteq \mathbb{C}$?

3. Seien endlich viele reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ gegeben. Gib eine Funktion f an, die unstetig ist bei $a_1, a_2, \ldots$ und a_N, aber stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$.

4. Gib eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nirgends stetig ist.

5. Was sagt der Zwischenwertsatz ?

6. Begründe, warum jede stetige Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ mindestens einen Fixpunkt besitzt.

7. Zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Gleichung $e^x = -x$ eine reelle Lösung besitzt.

8. Wann heißt f gleichmäßig stetig? Gib eine Bedingung an, unter der stetige Funktionen gleichmäßig stetig sind.

9. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, welche gleichmäßig stetig:
   $$|x|, \quad \exp(x), \quad x^2, \quad \frac{x^3+1}{x^4-1}, \quad [x] - x?$$

10. Überlege Dir Beispiele von stetigen Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die ihr Supremum annehmen bzw. nicht annehmen. Gib eine Bedingung an, unter der $\max_{x \in D} f(x)$ sicher existiert.

11. Sind die Bilder von Intervallen unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder Intervalle ? Sind die Bilder offener Intervalle immer offene Intervalle ?

12. Wo sind Potenzreihen stetig und wo sind sie gleichmäßig stetig?

13. Wann existiert die Inverse f^{-1} einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und wann ist die Inverse stetig?

14. Was ist ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$? Was ist ein Banachraum ?

15. Was bedeutet Konvergenz in normierten Vektorräumen ?

16. Definiere die Supremums–Norm für beschränkte, stetige Funktionen $f \in BC(D, \mathbb{R})$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und zeige, dass es sich tatsächlich um eine Norm handelt.

17. Gib eine Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to [0,1]$ an, so dass f_n punktweise konvergiert, jedoch nicht bezüglich der Supremums-Norm.
(Punktweise Konvergenz bedeutet, dass $f_n(x)$ konvergiert für $n \to \infty$ und jedes feste $x \in [0,1]$.)

18. Gib für jede der folgenden Funktionenfolgen ein (nichttriviales) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass die Folge f_n auf I gleichmäßig konvergiert:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \qquad f_n(x) = e^{-nx^2}, \qquad f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^n.$$

19. Was ist die Umkehrfunktion von $\exp(x)$, welche Funktionalgleichung erfüllt sie, wo ist sie definiert und wo ist sie stetig?

20. Wie ist die allgemeine Potenz x^α mit $x > 0$ reell und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert ?