Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 28.10.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 1: Wie betrachten einen Fluss $\varphi(t, x)$ auf der reellen Achse $x \in \mathbb{R}$.

(i) Welche α- und ω-Limesmengen können auftreten?

(ii) Zeichne einige Phasenportraits, die verschiedene mögliche Phänomene zeigen.

Hinweis: Betrachte beschränkte und unbeschränkte Trajektorien.

Aufgabe 2: Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Transformiere diese lineare Differentialgleichung auf Polarkoordinaten:

$$x = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix},$$

mit $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Skizziere für $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$ und selbst gewählte b Vektorfelder und Phasenportraits in (r, ϕ) sowie x.

Aufgabe 3: Der Fluss $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des mathematischen Pendels ist gegeben durch das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass der Fluss φ äquivariant unter der Verschiebung um eine volle Pendelumdrehung ist, d.h.

$$\varphi\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{für alle } t, x, v.$$

Aufgabe 4: Sei φ ein Fluss auf $X = \mathbb{R}^n$. Bezeichne

$$S_\vartheta : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R} \times X, \qquad (t, x) \mapsto (t + \vartheta, x)$$

den Zeit-Shift auf dem erweiterten Phasenraum $\mathbb{R} \times X$.

(i) Zeige, dass S_ϑ für jedes feste ϑ Integralkurven von φ in Integralkurven überführt.

(ii) Wann wird eine Integralkurve durch ein bestimmtes S_ϑ festgelassen? Wann durch alle S_ϑ?