Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 4.11.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 5: Betrachte die Abbildung

$$\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 + t, x_2 + \sigma t), \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

mit

$$\Phi_t(x_1 + k, x_2 + n) = \Phi_t(x_1, x_2) + (k, n), \qquad \forall k, n \in \mathbb{Z},$$

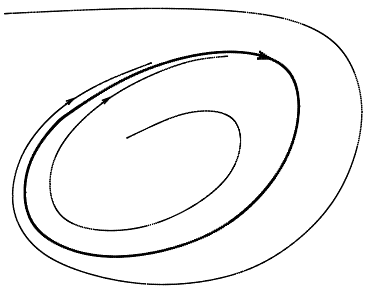
die einen Fluss auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ erklärt. Sei zunächst σ rational. Wie sehen dann typische Trajektorien aus? Beschreibe α- und ω-Limesmengen.
Freiwilliger Zusatz: Was passiert für irrationale σ ?

Aufgabe 6: Die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ sei auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Zeige, dass dann die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{1}{1 + |f(x)|^2} f(x)$$

auf $\mathbb{R}^n$ definiert und der zugehörige Fluss $\Phi(t, x)$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und Anfangswerte $x \in \mathbb{R}^n$ existiert.

Aufgabe 7: Gegeben sei ein periodischer Orbit Γ in $X = \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung U von Γ in X, so dass jede Trajektorie $\gamma(x_0)$, $x_0 \in U$, für $t \to \infty$ gegen Γ konvergiert.
Beispiel:



Zeige, dass dann jedes erste Integral in U konstant ist.

Aufgabe 8: [vgl. Arnol'd, 2.4.5] Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat das System

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 \\ \dot{x_2} &= kx_2 \end{aligned}$$

mit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ein nichtkonstantes erstes Integral?