

Übungen  
**Einführung in die Dynamischen Systeme**  
 Karsten Matthies, Stefan Liebscher  
**Abgabe: Montag, 11.11.2002, in der Vorlesung**

**Aufgabe 6:** [verschoben vom letzten Blatt]

Gegeben sei die Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Zeige, dass dann die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{1}{1 + |f(x)|^2} f(x)$$

auf  $\mathbb{R}^n$  definiert ist und der zugehörige Fluss  $\Phi(t, x)$  für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  und Anfangswerte  $x \in \mathbb{R}^n$  existiert.

**Aufgabe 9:** Löse die folgenden Anfangswertprobleme durch „Trennung der Variablen“:

(i)  $\dot{x} = x^3 e^t$ ,  $x(0) = 2$ ,

(ii)  $\dot{x} = 1 + x^2$ ,  $x(0) = 0$ .

Wie groß ist jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung ?

**Aufgabe 10:** Bestimme die  $\omega$ -Limesmengen jeder Trajektorie von

(i)  $\dot{x} = x(1 - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

(ii)  $\dot{x} = \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

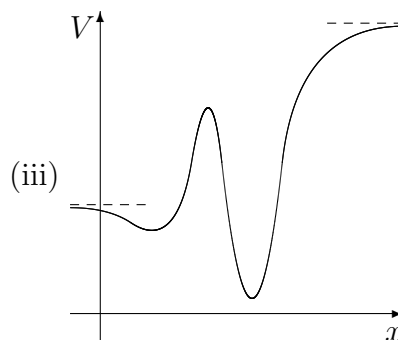
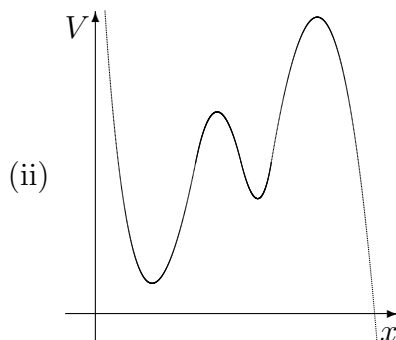
(iii)  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \cos x_1 \end{pmatrix}$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

*Hinweis:* Bestimme in der letzten Teilaufgabe ein erstes Integral.

**Aufgabe 11:** Zeichne die Trajektorien von

$$\ddot{x} + V'(x) = 0,$$

(i) für das Kepler-Problem,  $V(x) = -\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2}$ ,  $C > 0$ ,  $x > 0$ ;



**Aufgabe 12:** Betrachte das gedämpfte Pendel

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \sin x = 0,$$

mit  $\mu > 0$ . Zeige, dass die Energie

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x$$

entlang Trajektorien streng monoton fällt, außer in Ruhelagen.

*(Diesmal noch freiwilliger) Zusatz:* Benutze `dstool` zur Visualisierung des Phasenportraits. Auf der Web-Seite <http://www.math.fu-berlin.de/~Dynamik/lectures/> ist eine Beschreibung bereitgestellt. Abweichend davon kann die neueste Version (ohne weitere Vorabkonfigurationen) auf den Unix-Rechnern am Fachbereich über das Kommando `/home/diophant/dynamik/public/dstool2tk/bin/dstool_tk` gestartet werden. Im Parser kann das System zum Beispiel folgendermaßen eingegeben werden:

```
‡ Gedaempftes Pendel
x' = v
v' = -m v - sin(x)
INITIAL m 0.1
RANGE v -5 5 x -6.3 6.3
```

Bitte auch immer die Gleichungen in eine Datei sichern und zusammen mit den übrigen Bildern ausdrucken.

*Freiwilliger Zusatz:* Konvergiert jede Trajektorie gegen eine Ruhelage?