Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 18.11.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 13:

(i) Finde die Lösung der *linearen Differentialgleichung*

$$\dot{x} = a(t)x$$

für stetiges $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Anfangswert $x(0) = x_0$ durch „Trennung der Variablen".

(ii) Löse dann die *inhomogene lineare Differentialgleichung*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

mit stetigem b und Anfangsbedingung $x(0) = x_0$, indem Du eine (leicht lösbare) Differentialgleichung für

$$y(t) := x(t) \exp\left(-\int_0^t a(\tau)d\tau\right)$$

herleitest.

Aufgabe 14: Betrachte die von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x^2 + \lambda, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zeichne das zugehörige Vektorfeld auf $X = \mathbb{R}$ für $\lambda = -2$, $\lambda = -1$ und $\lambda = 1$. Für welche Werte von λ ist das Verhalten der Lösungen ähnlich wie bei $\lambda = -2$, wann ändert sich das Verhalten ?

Aufgabe 15: Betrachte die Pendelgleichung

$$\ddot{x} + g(x) = 0$$

für eine stetige ungerade Funktion g mit $g(x) \cdot x > 0$ für $x \neq 0$. Sei $p(g, a) > 0$ die minimale Periode der Lösung mit Anfangswert $x(0) = a > 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Zeige:

(i) Falls $g_1(x) < g_2(x)$ für alle $x > 0$, dann ist $p(g_1, a) > p(g_2, a)$ für alle $a > 0$.

(ii) Falls $x \mapsto g(x)/x$ für $x > 0$ streng monoton fällt, dann wächst $a \mapsto p(g, a)$ streng monoton für $a > 0$.

Hinweis: $y(t) := \frac{a_1}{a_2}x(t)$ löst die Gleichung $\ddot{y} + \tilde{g}(y) = 0$ mit $\tilde{g}(y) := \frac{a_1}{a_2}g(\frac{a_2}{a_1}y)$.

Aufgabe 16: In einem Meer sind Beute- und Räuberfische x bzw. y, die dem Volterra-Lotka Gesetz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\mu - \nu y), \\ \dot{y} &= y(-\varrho + \sigma x), \end{aligned}$$

mit $x, y, \mu, \nu, \varrho, \sigma > 0$ gehorchen. Durch ε-behutsames Netz-Fischen, $\varepsilon > 0$, wird μ zu $\tilde{\mu} = \mu - \varepsilon$ und ϱ zu $\tilde{\varrho} = \varrho + \varepsilon$. (Warum?) Wird dadurch der zeitlich gemittelte Beutefischbestand

$$\overline{x} := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

größer oder kleiner? Was gilt für den Gesamtfischbestand $\overline{x+y}$?
Hinweis: $x = \sigma^{-1}(\dot{y}/y + \tilde{\varrho})$.