Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 25.11.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 17: Man stelle sich einmal vor, dass jemand den harmonischen Oszillator

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ numerisch löst. Schätze ab, nach wievielen Umläufen

(i) das explizite Euler-Verfahren,

(ii) „das“ Runge-Kutta Verfahren 4ter Ordnung

jeweils mit Schrittweite $h = 0.1$ um 1% von der Kreisbahn abgewichen sein wird.

Aufgabe 18: Auf die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2, \qquad x(0) = x_0 = 1,$$

mit analytisch bekannter Lösung lassen wir die Verfahren (expliziter) Euler, Runge-Kutta und Adams-Bashforth los, um x zur Zeit $t = 0.9$ zu berechnen (z.B. mit `dstool`). Trage den Fehler über den Schrittweiten

$$h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.001$$

doppelt logarithmisch auf und bestimme so experimentell die (globale) Ordnung des Verfahrens. Was passiert zur Zeit $t = 1.0$? Versuche das Phänomen zu erklären.

Hinweis: In `dstool` sind alle benötigten Parameter und Variablen über die drei Dialogfelder `Panels` → `Selected...` und `Panels` → `Orbits...` → `Propagation...` erreichbar. Außerdem empfiehlt es sich, die Zeit als zusätzliche Variable (`t'=1`) mitzuführen. Dann kann man im Dialogfeld `Panels` → `Orbits...` als `Stopping condition` die Auswahl `Event stopping` mit `t = 0.9` treffen. Bedingungen an die „eigentliche“ Zeit `time` scheinen nicht korrekt implementiert zu sein.

Aufgabe 19: Sei $f: X \times \mathbb{R} \to X = \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Bezeichne $x(t,s)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \qquad x(s) = x_0$$

zur Zeit t. Kann man für festes t, für das $x(t, t_0)$ existiert, die Abbildung

$$x(t, \cdot): \ (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to X, \qquad s \mapsto x(t,s),$$

in einer Umgebung von t_0 nach s differenzieren? Welche Differentialgleichung erfüllt gegebenenfalls $v(t) := \mathrm{D}_s x(t, t_0)$?

Aufgabe 20: Sei $f : X \to X = \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und bezeichne $J(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ das maximale Existenzintervall der Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0.$$

(i) Zeige, dass $x_0 \mapsto t_+(x_0) \in (0, \infty]$ unterhalb-stetig ist.

(ii) Zeige am System
$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1^3(1 - x_2^2), \\ \dot{x_2} &= -x_1^2 x_2 (1 - x_1^2), \end{aligned}$$
dass die maximale Existenzzeit t_+ hingegen nicht oberhalb-stetig (also nicht stetig) sein muss.

Hinweis: Eine Funktion g heißt unterhalb-stetig in x_0 genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) - g(x_0) > -\varepsilon),$$

und oberhalb-stetig genau dann, wenn $-g$ unterhalb-stetig ist.

Im zweiten Aufgabenteil nutze man analog zum Lotka-Volterra-System den Euler-Multiplikator $x_1^{-3} x_2^{-1}$, um ein divergenzfreies Vektorfeld mit gleichen Trajektorien zu erhalten. Das zugehörige Erste Integral ist berechenbar und besitzt bis auf eine Ausnahme nur beschränkte Niveaumengen, die deshalb nur beschränkte Trajektorien mit unbeschränkten Existenzintervallen beinhalten.