Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 2.12.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 21: Finde ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass für reelle (2×2)-Matrizen A, B die Identität

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$$

nicht zu gelten braucht.

Aufgabe 22: Führe das Picard-Iterationsverfahren für die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

explizit durch. Die Startfunktion ist $x^0(t) \equiv x_0$. Auf welchem t-Intervall konvergiert die Iteration?

Aufgabe 23: [Lissajous-Figuren] Betrachte für eine symmetrische reelle 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

das Hamilton-System

$$(*) \qquad \ddot{x} = -Ax$$

zur Hamiltonfunktion $H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^{\mathrm{T}}\dot{x} + x^{\mathrm{T}}Ax)$.

(i) Transformiere $(*)$ auf die Gestalt

$$(**) \qquad \begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1 y_1 = 0, \\ \ddot{y}_2 + \omega_2 y_2 = 0, \end{cases}$$

mit ω_1, ω_2 reell (entkoppelte „Pendel“).

(ii) Skizziere (ohne `dstool` etc.) die Lösung $(x_1(t),\ x_2(t))$ von $(*)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

mit Anfangsbedingung $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 = 1$.

(iii) Zeichne (mit `dstool`) einige Lösungskurven von $(*)$ für drei selbst gewählte Wertepaare (ω_1, ω_2) mit $\omega_i > 1$.

Aufgabe 24: Wir wollen das gedämpfte lineare Pendel

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega x = 0$$

mit Parametern $\boldsymbol{\nu, \omega > 0}$ und Startwerten $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ untersuchen.

(i) Bestimme für alle ν, ω jeweils explizit die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, skizziere Phasenportraits und stelle in der (ν, ω)-Ebene die Bereiche mit unterschiedlichem qualitativen Verhaltens dar.

(ii) Wie ändert sich beim Übergang zwischen verschiedenen Zonen in der (ν, ω)-Ebene — z.B. bei Änderung der Dämpfung ν — das Phasenportrait? Treten dabei Unstetigkeiten der Jordan-Normalform bzw. des Phasenportraits auf?