Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 9.12.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 25: Betrachte das gekoppelte lineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + D(y-x),\\ \dot{y} &= Ay + D(x-y),\end{aligned}$$

mit x, y in $\mathbb{R}^n$. D bezeichnet eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, wobei alle $d_i > 0$ sind. Außerdem sei $\Re\mathrm{e}\,\operatorname{spec}(A) < 0$.

(i) Zeige: wenn $x(0) = y(0)$, dann konvergieren $x(t), y(t)$ gegen 0 für $t \to +\infty$.

(ii) Finde trotzdem Matrizen A, D, so dass $x(t) \to \infty$ für gewisse $x(0)$, $y(0)$ und $t \to +\infty$.

Hinweis: Wähle im zweiten Teil $n = 2$ und betrachte anschließend den <u>invarianten</u> Unterraum $\{x = -y\}$.

Aufgabe 26: Berechne numerisch (etwa mit `dstool`) die Wronski-Matrix $W(t)$ zur Lösung $x(t)$ der Lorenz-Gleichung mit den Parametern $r = 28$, $s = 10$, $b = 8/3$ und der Anfangsbedingung $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 5$. Dazu ist natürlich die Gleichung *und* die linearisierte Lorenzgleichung einzugeben, d.h. man betrachtet insgesamt 12 Gleichungen. Für t wähle die Werte 10, 15, 16.5, Schrittweite zwischen 0.01 und 0.05, Runge–Kutta–Verfahren. Wie groß ist wohl der Betrag des größten Eigenwertes von $W(t)$ ungefähr (ganz grobe Schätzung)? Deutung? Versuche bis $t = 30$ zugehen. Was passiert? Deutung?

Aufgabe 27: Wieviele Ziffern besitzt das einmillionste Glied der Folge (1, 3, 8, 20, 48, 112, ...), das heißt $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 3$?

Aufgabe 28: Bestimme die Lösungen der linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$