Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 16.12.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 29: In Analogie zur Darstellung eines Flusses zu einem Vektorfeld durch Variation der Konstanten wollen wir die Dynamik einer Abbildung beschreiben.

Gegeben sei also ein Banachraum X sowie Abbildungen $A : X \to X$ linear, $f : \mathbb{N} \to X$. Vervollständige nun die Formel

$$x(n) \;=\; A^{\bigcirc} x_0 + \sum_{k=\bigcirc}^{\bigcirc} A^{\bigcirc} f(\bigcirc)$$

und beweise, dass dadurch die eindeutige Lösung $x : \mathbb{N} \to X$ des Anfangswertproblems

$$x(0) \;=\; x_0, \qquad x(n+1) \;=\; A\,x(n) + f(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

gegeben ist.

Aufgabe 30: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiter sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein Fixpunkt von f und die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(p)$ habe nur Eigenwerte vom Betrag echt kleiner als 1.

Zeige, dass dann eine Umgebung U von p existiert mit der Eigenschaft

$$f^k(x) \in U \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und alle } k \geq 0$$

sowie

$$\lim_{k\to\infty} f^k(x) = p.$$

Wie lautet das entsprechende Kriterium für die asymptotische Stabilität von Fixpunkten im Spezialfall $n = 1$?

Aufgabe 31: Gegeben ein stetiger Fluss auf X und eine nicht-leere, kompakte, invariante Teilmenge M von X. Beweise oder widerlege: M ist genau dann stabil, wenn jede Umgebung von M eine positiv invariante Umgebung von M enthält.

Aufgabe 32: Jede Trajektorie des Lipschitz-Vektorfeldes f sei beschränkt. Beweise oder widerlege: Gilt für die Anfangswerte

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, x) \;=\; 0,$$

so auch für ihre ω-Limesmengen

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), \omega(x)) \;=\; 0.$$

Dabei benutzen wir als Abstandsbegriff zweier Mengen den symmetrischen Hausdorff-Abstand:

$$\operatorname{dist}(A, B) \;:=\; \max\left(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \operatorname{dist}(a,b)\,,\; \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} \operatorname{dist}(a,b)\right).$$