Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Freiwilliger Weihnachtszettel, Abgabe: Montag, 13.1.2002, in der Vorlesung

Aufgabe I: Ein Dieb hat dem Weihnachtsmann alle seine Päckchen geklaut. Zur Zeit $t = 0$ beginnt der Dieb mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit Radius r entlangzulaufen. Der Weihnachtsmann startet ebenfalls zur Zeit $t = 0$ im Mittelpunkt des Kreises und läuft mit konstanter Geschwindigkeit w immer genau auf den Dieb zu. Mögliche Koordinaten sind beispielsweise die Entfernung $\varrho(t)$ zwischen Weihnachtsmann und Dieb und der Winkel $\theta(t)$ zwischen den Verbindungslinien vom Kreismittelpunkt zu den beiden Akteuren. Zeige, dass im Fall $w < v$ der Weihnachtsmann den Dieb nie erreicht, sondern sich immer mehr einer Kreisbahn annähert. Welchen Radius hat dieser Kreis? Ist diese Kreisbahn ein stabiler periodischer Orbit? Wie sieht es für gut durchtrainierte Weihnachtsmänner ($w > v$) aus?

Aufgabe II: Castillo-Garsaw, Jordan-Salivia, Rodriguez-Herrera haben im Jahr 2000 das folgende Modell für den Anteil rauchender Schüler an einer Schule aufgestellt:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \mu - \beta PR - \mu P,\\ \dot{R} &= \beta PR - (\mu + \gamma)R,\\ \dot{N} &= \gamma R - \mu N.\end{aligned}$$

Dabei ist R der Anteil der Raucher, P der Anteil der potentiellen Raucher, N der Anteil der willensstarken Nichtraucher mit $P(0) + R(0) + N(0) = 1$. Der Parameter $1/\mu$ misst die durchschnittliche Aufenthaltsdauer an der Schule, $1/\gamma$ die durchschnittliche Zeit als Raucher und β die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nichtraucher zum Raucher wird, wenn er mit einem Raucher zusammentrifft.

(i) Zeige, dass $P(t) + R(t) + N(t)$ konstant ist.

(ii) Erkläre anschaulich die einzelnen Terme in der Differentialgleichung.

(iii) Bestimme alle Gleichgewichte.

Aufgabe III: Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \cos\left(\frac{t^3 + 3t + 1}{2003 - (2x-1)(2x+1)(2x+2)}\right), \qquad x(0) = 1$$

für $0 \leq t \leq 5$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe IV: Untersuche numerisch mit `dstool` den Van-der-Pol-Oszillator

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= y + x(1-x^2) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

mit Startwert $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ bis $t = 10$ für $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0007$ und 0.0002. Benutze dazu das Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite $h = 10^{-3}$. Beschreibe Beobachtungen und Probleme! Treten die Probleme auch auf, wenn man einen der anderen Löser benutzt?

Freiwilliger Zusatz: Kannst Du erklären, was beim „normalen" Runge-Kutta-Verfahren bei $\varepsilon = 0.0007$ passiert?

Aufgabe V: Eine stetige Funktion $y(t)$ erfülle die Integralgleichung

$$y(t) = \int_0^t y(s)^\alpha \sin\left(2003 y(s)\right) \,\mathrm{d}s$$

für ein $\alpha \geq 0$ und alle $t \in [0,1]$. Zeige, dass dann $y(t) \equiv 0$ konstant ist für $t \in [0,1]$. Gilt diese Aussage auch noch, wenn die Integralgleichung mit einem $\alpha \in [-1, 0)$ erfüllt ist?

Aufgabe VI: Betrachte den Banachraum BC^1 der stetig differenzierbaren Vektofelder $f: X \to X = \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\|f\|_{BC^1} := \sup_{x \in X} (|f(x)| + |f'(x)|) < \infty.$$

Seien $f, g \in BC^1$ und bezeichne $x(t, f)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

zur Zeit t. Kann man, für festes t, die Abbildung

$$x(t, \cdot): BC^1 \to X, \qquad f \mapsto x(t, f),$$

nach f differenzieren? Welche Differentialgleichung erfüllt gegebenenfalls die Variation $v(t) := \mathrm{D}_f x(t, f) g$?