Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 20.1.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 33: An einem Brandenburger See wird fleißig nach Karpfen geangelt. Unter den Annahmen,

- die Karpfen vermehren sich nach einer logistischen Gleichung, wenn überhaupt keine Angler vorhanden sind,
- die Menge der gefangenen Karpfen ist proportional sowohl zur Anzahl der Angler als auch zur Anzahl der Karpfen,
- die Anziehungskraft des Sees für Angler steigt proportional mit der Anzahl der Karpfen und nimmt proportional zur Anzahl der dort schon angelnden Kollegen ab,

ist

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \alpha K(1-K) - KA, \\ \dot{A} &= \beta K - A \end{aligned}$$

ein Modell für die Anzahl K der Karpfen und die Anzahl A der Angler. Dabei sind $\alpha, \beta > 0$ Konstanten.

(i) Bestimme die Gleichgewichte und deren Stabilität.

(ii) Zeichne ein Phasenportrait.

(iii) Was ändert sich an den Gleichungen und am Verhalten der Lösungen, wenn man mit einer konstanten Rate neue Karpfen im See aussetzt?

Aufgabe 34: Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Mengen und φ_t ein Fluss auf X. A heißt *ketten-rekurrent* in B, wenn es für jedes $x_0 \in A$ und jedes $\varepsilon > 0$, $T > 0$ ein positives n sowie Zeiten $t_0, \ldots, t_{n-1} \geq T$ und Punkte $x_1, \ldots, x_{n-1} \in B$ gibt, so dass für $i = 0, \ldots, n-1$ gilt

$$\operatorname{dist}(\varphi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Dabei ist $x_n = x_0$ gesetzt. A heißt *rekurrent*, wenn man stets $n = 1$ wählen kann, d.h. wenn x_0 in $\omega(x_0)$ liegt.

Interpretiere Kettenrekurrenz, z.B. als Rundungs- oder Messfehler. Zeige, dass für $y_0 \in X$ die ω-Limesmenge $\omega(y_0)$ ketten-rekurrent in X aber nicht unbedingt rekurrent ist.

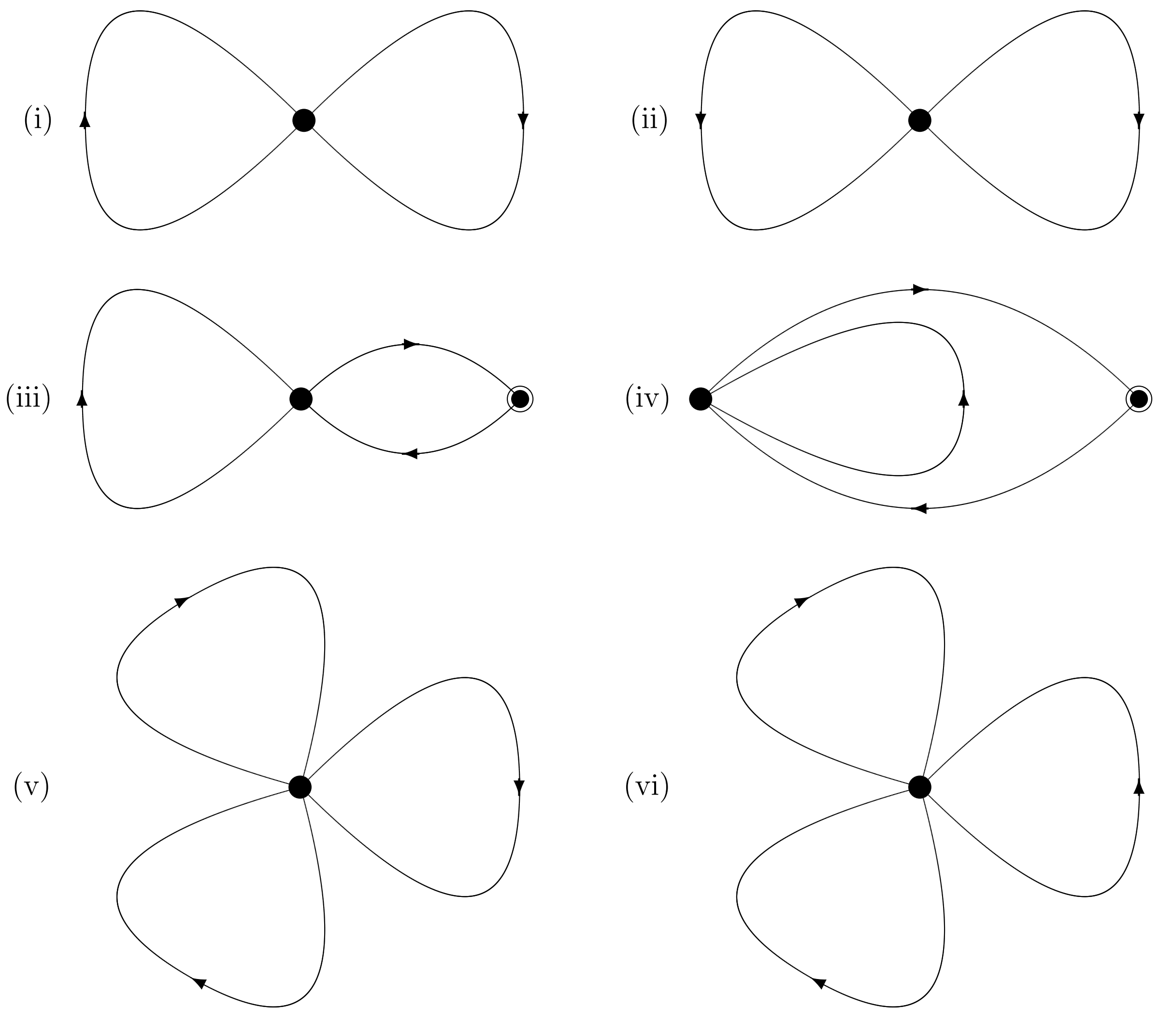
Freiwilliger Zusatz: Sei die Trajektorie $\varphi_t(y_0)$ beschränkt. Ist dann $\omega(y_0)$ ketten-rekurrent sogar in $\omega(y_0)$?

Aufgabe 35: Zeige, dass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - x^2 - y^2)y - x\end{aligned}$$

genau eine (echt) periodische Lösung besitzt. Wie lautet die Matrix-Differentialgleichung für die Ableitung nach den Anfangsbedingungen (x_0, y_0) entlang dieser Lösung ?

Aufgabe 36: Welche der folgenden Mengen können ω-Limesmengen eines Flusses im $\mathbb{R}^2$ sein und welche nicht? Begründe, ohne explizite Vektorfelder anzugeben.



Dabei bezeichnen Scheiben ● Gleichgewichte, beringte Scheiben ◉ stellen hyperbolische Sättel dar.