Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 27.1.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 37: Beweise oder widerlege den Satz von Poincaré & Bendixson für Flüsse auf

(i) der Sphäre S^2,

(ii) dem Torus T^2.

Aufgabe 38: [Floquet-Theorie für diskrete dynamische Systeme] Betrachte die Iteration

$$x_{k+1} = A_k x_k$$

mit $A_{k+p} = A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und einer feste Periode $p \in \mathbb{N}$. Weiter seien alle Matrizen A_k regulär.

Zeige, dass Matrizen B, C_k, $k \in \mathbb{N}$ existieren mit $C_k = C_{k+p}$ und

$$\prod_{k=0}^{m} A_k = C_m B^m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 39: Betrachte die Rayleigh-Gleichung

$$\ddot{x} + \lambda \left(\frac{1}{3}\dot{x}^3 - \dot{x} \right) + x = 0$$

mit einem kleinen Parameter $|\lambda| \ll 1$. Schreibe die Gleichung als System 1. Ordnung. Wie lautet die Lösung mit Anfangswert $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ für $\lambda = 0$? Zeige, dass die Lösung differenzierbar nach λ ist. Welche Gleichung erfüllt die Ableitung entlang der Lösungen mit $\lambda = 0$?

Freiwilliger Zusatz: Kannst Du mit Hilfe dieser Ableitung herausfinden, wo man für kleine $|\lambda| \neq 0$ periodische Lösungen findet?

Aufgabe 40: Plotte mit `dstool` die „Zeit-2π–Abbildung“ (POINCARÉ-Abbildung)

$$\begin{array}{rcl} P : S^1 \times \mathbb{R} & \to & S^1 \times \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x(2\pi) \\ \dot{x}(2\pi) \end{pmatrix} \end{array}$$

der Schaukel ($x \approx 0$), bzw. des kopfstehenden Pendels ($x \approx \pi$)

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \alpha^2 \sin t) \sin x = 0$$

a) nahe $\underline{x} = 0$ mit $\omega = 0.05$ bzw. $\omega = 0.5$ und jeweils $\alpha = 0.2$

b) nahe $\underline{x} = \pi$ mit $\omega = 0.05$ bzw. $\omega = 0.005$ und jeweils $\alpha = 0.2$ (hier $|\dot{x}| \leq 0.03$).

Beurteile das Stabilitätsverhalten der Schaukel/des Pendels.

Hinweis: Eine Möglichkeit, die Gleichung einzugeben ist:

```
♯ Schaukel
x' = xdot
xdot' = -sin(x)*(omega*omega+alpha*alpha*sin(t))
t' = 1
INITIAL x 0.0 xdot 0.3 t 0 omega 0.05 alpha 0.2
RANGE x 0 6.283 t 0 6.283 xdot -1 1
PERIODIC x 0 6.283 t 0 6.283
```

Die Variablen t und x werden dann als periodisch erkannt.

Benutze dann die Option **Poincare Section** im Menü **Orbits** und plotte beispielsweise immer Punkte bei $t = 0$. Bitte beachten, die Periodenanzahl (Parameter ,,Stop” im Menü Orbits, Vorgabewert 5000) unbedingt auf etwa 100 zu verringen, oder sehr viel Zeit mitbringen!