

Übungen
Einführung in die Dynamischen Systeme
Karsten Matthies, Stefan Liebscher
Abgabe: Montag, 3.2.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 41: Gegeben sei ein periodisch angeregtes Vektorfeld

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t/\varepsilon),$$

mit $g(x, \tau) = g(x, \tau + 1)$. Der Mittelwert von $g(x, \cdot)$ sei für alle x Null. Zeige, dass in der Nähe eines stabilen Gleichgewichtes des gemittelten Systems

$$\dot{y} = f(y)$$

die Approximationsgüte $\mathcal{O}(\varepsilon)$ für *alle* Zeiten $t \in \mathbb{R}_+$ erhalten bleibt.

Aufgabe 42: [FLOQUET-Theorie in einer Dimension] Betrachte das zeitabhängige, periodische Vektorfeld

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a(t+p) = a(t).$$

Zeige, dass die Lösung dargestellt werden kann als

$$x(t) = e^{bt} q(t) x_0,$$

mit periodischer Funktion q , $q(t+p) = q(t)$, und einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Bestimme b und q .

Aufgabe 43: Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit ℓ disjunkten kreisförmigen Löchern und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X mit $\operatorname{div} f > 0$. Zeige, dass dann der zugehörige Fluss höchstens ℓ periodische Orbits in X besitzen kann.

Aufgabe 44: [Arnol'd, Kapitel 3.16, Aufgabe 2] Anknüpfend an die Aufgabe 40 vom vorangegangenen Zettel wollen wir nun analytisch nachprüfen, dass die obere (im allgemeinen instabile) Gleichgewichtslage eines Pendels durch vertikale Schwingung des Aufhängepunktes stabilisiert werden kann.

Sei die Pendellänge l . Die Anregung am Aufhängepunkt habe die Amplitude $a \ll l$ und die Periode 2τ , wobei zur Vereinfachung der Rechnung die Beschleunigung stückweise konstant $\pm c = \pm 8a/\tau^2$ sein soll. Die Bewegungsgleichung des Pendels kann dann auf die Gestalt

$$\ddot{x} = (\omega^2 \pm \alpha^2)x$$

mit $\omega^2 = g/l$, $\alpha^2 = c/l$ gebracht werden, wobei das Vorzeichen jeweils nach der Zeit τ wechselt. Für hinreichend schnelle Anregung ($\tau \ll 1$) ist $\alpha^2 = 8a/(l\tau^2) > \omega^2$.

Wie schnell muss die Anregung mindestens sein, damit das kopfstehende Pendel stabil wird?