Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Montag, 10.2.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 45: Beweise oder widerlege für Vektorfelder f im $\mathbb{R}^3$: Gilt $\operatorname{div} f = 0$ so hat f ein nichttriviales, reguläres Erstes Integral. Dabei heißt ein Erstes Integral I genau dann regulär, falls ∇I nur in Nullstellen des Vektorfeldes verschwindet.

Aufgabe 46: Wir stellen uns ein Dreieck gekoppelter „Oszillatoren“ vor, so dass jeder den nächsten anregt:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_i &=& f(x_i, x_{i-1}), \qquad i \pmod{n}, n = 3, \\ x(0) &:=& x^0 \neq 0, \qquad x = (x_0, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Sei dabei f glatt, $f(0,0) = 0$ und $f(0,y)y > 0$ für alle $y \neq 0$. Der zugehörige Fluss existiere global. Falls alle $x_i \neq 0$ sind, definiere $z(x)$ als Anzahl der i, für die $x_i x_{i-1} < 0$ gilt. Bezeichne ferner $S(x^0)$ die Menge der Zeiten t, zu denen $x_i = 0$ für mindestens ein i ist. Zeige:

(i) S ist diskret;

(ii) $z(x(t_1)) \geq z(x(t_2))$, wenn $t_1 < t_2$ beide nicht in S liegen.

Freiwilliger Zusatz: Gilt das auch für eine höhere Anzahl $n > 3$ von Oszillatoren?

Aufgabe 47: Als Modell für gewisse organische Reaktionen hat Seklov 1970 das folgende System vorgeschlagen:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& 12(0.01 + x_1^3)/(1 + x_1^3) - x_1(1 + x_2), \\ \dot{x}_2 &=& x_1(1.5 + x_2) - x_2. \end{array}$$

Berechne mit `dstool` für $0 \leq t \leq 10$ die Lösungen zu den Startwerten $x = (0.3212, 0.5)$ und $x = (0.3213, 0.5)$. Versuche den dramatischen qualitativen Unterschied der beiden Lösungen durch eine stabile Mannigfaltigkeit zu erklären.

Hinweis: Mit `dstool` kann man stabile und instabile Mannigfaltigkeiten auch numerisch berechnen. Finde dazu zunächst über die Option `Fixed points... Find fixed points` die Gleichgewichte und berechne dann mit der Option `Fixed points... Compute 1-d manifolds` die zugehörigen Mannigfaltigkeiten. Für die Mannigfaltigkeiten müssen die `initial stepsize` auf etwa 0.001 und die Anzahl der `steps` auf 500 bis 3000 erhöht werden. In einem Ausschnitt des Phasenraums von $(-1, -1)$ bis $(3, 9)$ sollte alles zu sehen sein.

Aufgabe 48: Sei $x = 0$ ein *isoliertes* Gleichgewicht eines Flusses im $\mathbb{R}^2$. Zeige:

(i) $x = 0$ ist genau dann stabil aber kein Attraktor, wenn jede Umgebung von $x = 0$ (mindestens) einen (echt) periodischen Orbit enthält.

(ii) Falls eine C^2-Lyapunov-Funktion V mit $\nabla V(0) = 0$ und indefiniter Hesse-Matrix $\nabla^2 V(0)$ existiert, so ist $x = 0$ instabil.