Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 24.04.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1:
Die Abbildung $A : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$Af := f(a) - f(b).$$

Zeige, dass A eine lineare, beschränkte Abbildung ist und berechne

$$\|A\| = \sup\{|Af|\ ;\ f \in C([a,b],\mathbb{R}), \|f\| = 1\}.$$

Aufgabe 2:
Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Regelfunktionen, die bezüglich der Supremums–Norm gegen eine Regelfunktion g konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\| = 0.$$

Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Aufgabe 3:
Berechne

$$\int_0^1 t\,dt$$

durch geeignete Approximation von $f(t) = t$ mit Treppenfunktionen.

Aufgabe 4:
Zeige:

(i) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist auch $|f|$ eine Regelfunktion.

(ii) Das Produkt zweier Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion.

(iii) Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.