Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 26.6.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 37:
Zeige, dass die folgende Aussage äquivalent zum Baireschen Kategoriensatz der Vorlesung ist: Sei X ein vollständiger metrischer Raum, der sich als die Vereinigung

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$$

abgeschlossener Mengen B_i schreiben lässt. Dann besitzt wenigstens eine dieser Mengen B_i ein nichtleeres Inneres.
(In einigen Büchern wird diese Version als Bairescher Kategoriensatz bezeichnet.)

Aufgabe 38:
Wir betrachten eine Variante des „Spiels von Banach-Mazur", das wir schon in *Analysis I* kennengelernt haben. Max und Moritz konstruieren dabei gemeinsam eine reelle Zahl $z \in [0, 1]$.
Das geht so: Max beginnt und wählt ein beliebiges Intervall $[x_1, y_1] \subset [0, 1]$. Nun darf Moritz ein beliebiges Intervall $[x_2, y_2] \subset [x_1, y_1]$ bestimmen, dessen Länge kleiner als $1/2$ sein muss. Dann ist wieder Max am Zug und wählt ein Intervall $[x_3, y_3] \subset [x_2, y_2]$, dessen Länge kleiner als $1/3$ ist. So geht das (unendlich lange) weiter. Durch die Folge der Intervalle $[x_n, y_n]$ wird genau eine reelle Zahl $z = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$ festgelegt.
Max gewinnt, falls z in einer vorgegebenen Teilmenge $M \subseteq [0, 1]$ liegt, ansonsten ist Moritz der Sieger.
Kann man für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie angeben, wenn die Menge M von 2. Baire-Kategorie ist, also den abzählbaren Durchschnitt von offenen, dichten Mengen enthält ?

Aufgabe 39:
Betrachte die Menge $\mathcal{M}(n, n)$ der $n \times n$-Matrizen, die durch Identifizierung mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ zu einem metrischen Raum wird. Zeige:

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}(n, n) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A), \end{aligned}$$

die jeder Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j, \leq n}$ ihre Determinante zuordnet, ist stetig.

(ii) Die Menge $\{A \in \mathcal{M}(n, n) \ ; \ \det(A) \neq 0\} \subseteq \mathcal{M}(n, n)$ ist offen und dicht in $\mathcal{M}(n, n)$. Für die Dichtheit ist es nützlich, das *charakteristische Polynom*

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda\, I).$$

zu betrachten. Nutze aus, dass $\det(A)$ das Produkt der (komplexen) Nullstellen von P ist.

Aufgabe 40:

(i) Seien $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ kompakte Mengen in einem metrischen Raum mit $K_{i+1} \subseteq K_i$ für alle $i \geq 1$. Zeige, dass dann $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$.

(ii) Gilt auch stets $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$, falls die K_i nur abgeschlossen sind?