Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 3.7.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 41:
Sei E ein vollständiger metrischer Raum mit beschränkter Metrik $d \leq 1$.
In Aufgabe 31 wurde gezeigt, dass

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq E \ : \ A \ \text{ ist abgeschlossen und nichtleer}\}$$

versehen mit dem symmetrischen Hausdorff-Abstand

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \ \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}$$

ein metrischer Raum ist.
Zeige nun, dass $(\mathcal{A}, d_H)$ sogar vollständig ist.

Tipp: Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen in der Hausdorff-Metrik d_H gegen $A_\infty := \{x \ ; \ \lim\limits_{n \to \infty} d(x, A_n) = 0\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n \geq N} A_n}$ konvergiert.

Aufgabe 42:
Zeige, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind: Für je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ gibt es positive Konstanten c und C, so dass

$$c\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 43:
Seien E und F metrische Räume, E sei kompakt und $f : E \to F$ stetig. Zeige: Falls bijektiv ist, dann ist f ein Homöomorphismus, d.h. auch f^{-1} ist stetig.

Aufgabe 44:

(i) Sind die folgenden beiden Teilmengen von $C^0([0,1], \mathbb{R})$ kompakt:

$$M_1 = \{\sin(n\pi x) \ ; \ n \in \mathbb{N}\}, \qquad M_2 = \{x^\alpha \ ; \ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1\} \quad ?$$

(ii) Bestimme den Abschluss der Menge

$$\{g \in BC^1([0,1], \mathbb{R}) \ ; \ \|g\|_{BC^1} = \|g\|_{BC^0} + \|g'\|_{BC^0} \leq 1\}$$

im metrischen Raum $BC^0([0,1], \mathbb{R})$.

Tipp: Eine stetige Funktion $f \in BC^0([0,1], \mathbb{R})$ kann man beispielsweise durch eine Familie von Funktionen $f_h \in BC^1([0,1], \mathbb{R})$ gleichmäßig approximieren, indem man über ein Intervall der Länge $2h$ mittelt:

$$f_h := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Dabei muss natürlich f außerhalb von $[0,1]$ geeignet fortgesetzt werden. Für $h \to 0$ konvergieren dann die f_h gleichmäßig gegen f.