Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 10.7.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 45:
Betrachte das iterierte Funktionensystem, bestehend aus den folgenden beiden affinen Abbildungen f_i mit $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{cccc} f_i : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \end{array}$$

i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i
1	-0.3	-0.6	0.5	-0.3	-0.2	-0.4
2	0.5	-0.4	-0.1	-0.7	-0.3	0.2

Zeige, dass f_1 und f_2 Kontraktionen sind bezüglich der Norm

$$|(x, y)|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

Plotte beispielsweise mit `Matlab` den "Attraktor" ! Was siehst Du ?
Hinweis: Statt in jedem Schritt alle Funktionen zu iterieren, schlägt Barnsley folgendes Verfahren vor: Ausgehend von einem Startpunkt, wählt man bei jeder Iteration eine der Abbildungen f_i jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zufällig aus.
Die Folge der Iterierten approximiert dann den Attraktor !

Tipps zu Matlab: `rand` erzeugt eine (Pseudo-)Zufallszahl im Intervall $(0, 1)$. Um *sehr kleine* Punkte zu zeichnen empfiehlt es sich, für die Graphik-Option `MarkerSize` den Wert 1 zu wählen, also beispielsweise `plot(X,Y,'.','MarkerSize',1)`.

Aufgabe 46:
Betrachte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (\|x\|_2)^\alpha$.
Für welche $x \in \mathbb{R}^n$ und welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f stetig, bzw. differenzierbar ? Berechne gegebenfalls den Gradienten ∇f.

Aufgabe 47:
Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei homogen vom Grade $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h.

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0.$$

Zeige, dass dann die *Eulersche Identität*

$$x^T \cdot \ \operatorname{grad} f(x) = \alpha \cdot f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Aufgabe 48:
Seien $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ Banachräume. Zeige:

$$\begin{aligned} f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X &\to Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n \\ x &\mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \end{aligned}$$

ist differenzierbar genau dann, wenn die Funktionen $f_i : X \to Y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ differenzierbar sind.