# Übungen zu Analysis II

*B. Fiedler, J. Härterich*

Abgabe am 8.5.2003 in der Vorlesung

**Aufgabe 9:**
Berechne für

(i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ und (ii) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)^3}$

die Partialbruchzerlegung und jeweils $\displaystyle\int_1^y f(x)\,dx$.

**Aufgabe 10:**
Für die stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.
Zeige, dass dann $f(x_0) = 0$ ist für mindestens ein $x_0 \in (a,b)$.

Gilt dies auch für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$?

*Freiwilliger Zusatz:* Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Zeige, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) = 0$$

im Intervall $(0,\pi)$ mindestens eine Lösung besitzt.

**Aufgabe 11:**
Berechne mindestens vier der folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$

(iii) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (iv) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx$

(v) $\displaystyle\int x(\ln x)^n\,dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(vi) $\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$ für alle $n \in \mathbb{N}$

**Aufgabe 12:**
Finde eine Folge von integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f$ konvergiert, so dass

(i) $f$ nicht integrierbar ist,

(ii) $f$ zwar integrierbar ist, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$