Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 15.5.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 13:

(i) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$ auf $[a, b]$ und es gelte

$$\int_a^b f(t)\, dt = 0.$$

Zeige, dass dann $f(t) = 0$ ist für alle $t \in [a, b]$.

(ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt = 0$$

für *alle* stetigen Funktionen $g \in C([a, b], \mathbb{R})$.
Zeige, dass dann ebenfalls $f(t) = 0$ ist für alle $t \in [a, b]$.

Aufgabe 14:

(i) Zeige, dass die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen $N_1, N_2, N_3, \ldots$ (im Lebesgueschen Sinne) wieder eine Nullmenge ist.

(ii) Sei $C_0 := [0, 1]$. Die Menge C_{i+1} entsteht aus C_i, indem aus jedem Teilintervall das (offene) mittlere Drittel weggelassen wird, d.h. $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \ldots$.
Die *Cantormenge* C ist definiert als Durchschnitt

$$C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i.$$

Zeige, dass C eine Nullmenge (im Lebesgueschen Sinne) und überabzählbar ist.

Aufgabe 15:

(i) Sei C die Cantormenge (siehe Aufgabe 14). Zeige, dass die Funktion χ_C mit

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in C \\ 0, & \text{falls } x \notin C \end{cases}$$

Riemann-integrierbar, aber keine Regelfunktion ist und berechne das Riemann-Integral $\int_0^1 \chi_C(x)\, dx$.

(ii) Berechne das Riemann-Integral $\int_0^1 f(t)\, dt$ für die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls die Dezimaldarstellung von t eine 1 enthält} \\ 0 & \text{falls die Dezimaldarstellung von t keine 1 enthält} \end{cases}$$

Aufgabe 16:

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar.
Ist dann $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch Riemann-integrierbar?

***** Wichtig ! Korrektur ! *****

Bei Aufgabe 9(ii) ist die untere Grenze des Integrals unglücklich gewählt. Berechnet werden soll hier das Integral $\int_1^y f(x)\, dx$.