Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 22.5.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 17:
Überprüfe anhand der Definitionen für welche $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx$$

als Regelintegral, als Riemann-Integral bzw. als Lebesgue-Integral existiert.

Aufgabe 18:
Seien drei reelle Zahlen mit $1 < p, q, r < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ gegeben.
Zeige: Für Funktionen $f \in L^p([0,1], \mathbb{R})$, $g \in L^q([0,1], \mathbb{R})$ und $h \in L^r([0,1], \mathbb{R})$ liegt das Produkt $f \cdot g \cdot h$ in $L^1([0,1], \mathbb{R})$ und es gilt die Ungleichung

$$\int_0^1 |fgh| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q} \cdot \|h\|_{L^r}.$$

Aufgabe 19:
Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Wert:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \log \sin x \, dx$ (Tipp: $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$)

(iv) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ (Tipp: $x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$)

Aufgabe 20:
Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Ausserdem sei f monoton fallend mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und es gelte

$$-C \leq \int_0^a g(t) \, dt \leq C$$

für alle $a > 0$ und eine (von a unabhängige) Konstante $C > 0$.
Zeige, dass dann das Integral $\int_0^\infty f(t)g(t) \, dt$ konvergiert.

*****

Freiwillige Zusatzaufgabe (interessant, aber nicht einfach):
Sei $g : [0,1] \to [0,1]$ stetig und sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar.
Ist dann $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ auch Riemann-integrierbar?