Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe bis 30.5.2003 bei den Tutoren

Aufgabe 21:
Zeige, dass die Folge $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$ streng monoton wachsend und die Folge $b_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ streng monoton fallend ist.
Zeige weiter, dass beide Folgen gegen den selben Grenzwert konvergieren, die sogenannte *Euler-Mascheroni-Konstante.*

Aufgabe 22:
Beweise:

(i) Die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k(\log k)^{\alpha}}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.

(ii) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\log n}{(1+n^2)^{\beta}}$?

Aufgabe 23:
Bezeichne $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ die Gamma-Funktion. Zeige, dass

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite stellt den Flächeninhalt unter der sogenannten Gauss'schen Glockenkurve dar, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle spielt.

Aufgabe 24:

(i) Zeige mit Hilfe der Stirlingschen Formel, dass für die Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ die asymptotische Formel

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

gilt.

Leite ausserdem eine analoge Formel für $\binom{3n}{n}$ her.

(ii) Wieviele Dezimalstellen hat die Zahl 10000! ?

(iii*) *Völlig freiwilliger Knobel-Zusatz:* Auf wieviele Nullen endet die Dezimaldarstellung der Zahl 10000! ?