Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 5.6.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 25:

(i) Sei $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion und bezeichne

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

den n-ten Fourier-Koeffizienten von f.

Zeige, dass für die Fourier-Koeffizienten der Ableitungen $f^{(\ell)}$ gilt:

$$c_n(f^{(\ell)}) = (in)^\ell c_n(f)$$

für $1 \leq \ell \leq k$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Sei $g \in \tilde{L}^2$ eine 2π-periodische Funktion.

Welche Auswirkungen hat es auf die Fourier-Koeffizienten $c_n(g)$, wenn g eine gerade, ungerade, reellwertige oder π-periodische Funktion ist ?

Aufgabe 26:
Finde eine Folge von Funktionen f_n, die in $\tilde{L}^2$ gegen 0 konvergiert, so dass $f_n(x)$ für *kein* $x \in [0, 2\pi]$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 27:

(i) Berechne die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion f mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(iii) In der Vorlesung wurde die Fourier-Reihe zur Rechtecks-Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \pi) \\ -1 & \text{für } t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

berechnet.

Plotte die Partialsummen der Fourierreihe von f für $n = 11, 51$ und 101 mit `MATHEMATICA` oder `MATLAB`.
Gilt punktweise Konvergenz für alle x?

Bemerkung: Die Fourier-Koeffizienten können aus der Vorlesung übernommen oder z.B. mit `MATHEMATICA` direkt berechnet werden.

Aufgabe 28:
Bestimme eine 2π-periodische Funktion $u(x)$, die die Differentialgleichung

$$u''(x) - \lambda u(x) = g(x)$$

löst, wobei $\lambda > 0$ und die 2π-periodische, stetige Funktion g vorgegeben sind. Setze dabei voraus, dass sich u als Fourier-Reihe darstellen lässt und dass die Fourier-Reihe von g absolut konvergent ist.
Freiwilliger Zusatz: Was kann für $\lambda \leq 0$ passieren ?