Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 12.6.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 29:
Für die folgenden Mengen bestimme man das Innere, den Rand sowie den Abschluss im metrischen Raum (E, d):

(i) $M_1 = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m};\ m, n \in \mathbb{N}\}$ mit $E = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$,

(ii) $M_2 = \cup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ mit $E = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$,

(iii) $M_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ mit $E = \mathbb{R}^2$ und $d(x, y) = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right)^{1/2}$,

(iv) $M_4 = \{x \in \mathbb{R}^2\ ,\ d\,(x, (0,0)) = d\,(x, (2,2))\}$ mit $E = \mathbb{R}^2$ und $d\,(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

Aufgabe 30:
Es sei wieder E ein metrischer Raum und $A \subseteq E$.
Beweise oder widerlege:

(i) $\overset{\circ}{\overline{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$,

(ii) $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$.

Aufgabe 31:
Sei E ein metrischer Raum mit beschränkter Metrik $d \leq 1$.

(i) Zeige, dass für $x \in E$ und $A \subseteq E$ gilt: $d(x, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bar{A}$

(ii) Zeige, dass die Menge $\mathcal{P}(E)$ aller nichtleeren Teilmengen von E versehen mit der symmetrischen Hausdorff-Metrik

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B),\ \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}$$

im allgemeinen *kein* metrischer Raum ist.

(iii) Zeige weiter, dass man einen metrischen Raum $(\mathcal{A}, d_H)$ erhält, wenn man $\mathcal{P}(E)$ durch

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq E\ ;\ A \text{ ist abgeschlossen und nichtleer}\}$$

ersetzt.

Aufgabe 32:

(i) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeige, dass I zusammenhängend ist.

(ii) Sei (E, d) ein metrischer Raum und $A_1, A_2, \ldots \subseteq E$ seien zusammenhängende Teilmengen von E mit

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset.$$

Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ zusammenhängend.